線型部分空間の基底と次元

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec08，2019 年 09 月 27 日 at Komaba
2019 年 09 月 29 日修正 V03

部分空間

定義 $\mathbf{K}^n$ の部分集合 V が

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \ \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V$$

を満たすとき，V を部分空間と呼ぶ.

例 (自明な部分空間) $\{\vec{0}\}$, $\mathbf{K}^n$
例 A m 行 n 列の行列に対して

$$\ker(A) := \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n;\ A\vec{v} = \vec{0}\}$$

$$\mathrm{Im}(A) := \{A\vec{v} \in \mathbf{K}^m;\ \vec{v} \in \mathbf{K}^n\}$$

部分空間 (2)

例 $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$L(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m) := \{x_1\vec{p}_1 + \ldots + x_m\vec{p}_m;\ x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbf{K}\}$$

を $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m$ が生成する部分空間と呼ぶ.

V は $\mathbf{K}^n$ の部分空間で，$V \neq \{\vec{0}\}$ とします．
$\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m$ が V の基底であるとは V が以下の条件を満たすときです．

- $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m$ は線型独立である．
- $L(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m) = V$

定理 1 V は $\mathbf{K}^n$ の部分空間で，$V \neq \{\vec{0}\}$ とします．

- $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m$ は V の基底である，
- $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell$ は V の基底である，

と仮定します．このとき $m = \ell$ となります．

定理 1 は次の定理 2 から証明できます．

定理 2 $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m \in \mathbf{K}^n$, $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell \in \mathbf{K}^n$ とします．

$$\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell \in L(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m)$$

で $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell$ が線型独立ならば $\ell \leq m$ となります．

部分空間の基底 (3)—定理 2 の証明

$$
\begin{aligned}
\vec{q}_1 &= c_{11}\vec{p}_1 + \ldots + c_{m1}\vec{p}_m \\
\vec{q}_2 &= c_{12}\vec{p}_1 + \ldots + c_{m2}\vec{p}_m \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\vec{q}_\ell &= c_{1\ell}\vec{p}_1 + \ldots + c_{m\ell}\vec{p}_m
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{pmatrix} \vec{q}_1 & \cdots & \vec{q}_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \cdots & \vec{p}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m\ell} \end{pmatrix}
$$

となります．$m < \ell$ ならばで $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell$ は線型従属となってしまうことが次の定理 3 から従います．

部分空間の基底 (4)—定理 3

定理 3 m 行 n 列の行列 A に対して，$m < n$ ならば，ある $\vec{v} \in \mathbf{K}^n$ が存在して

$$A\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

が成立します．

m に関する帰納法から以下の定理 4 から定理 3 は従います．（$\vec{a}_1 = \vec{0}$ ならば $A\vec{e}_1 = \vec{0}$ となります．）

定理 4 m 行 n 列の行列 A に対して $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ ならば，ある m 次正則行列 P が存在して

$$PA = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

基底の存在 (1)

定理 5 $\mathbf{K}^n$ の部分空間 V の基底 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell$ があるとします. $\vec{v}_{\ell+1} \in \mathbf{K}^n$ が

$$\vec{v}_{\ell+1} \notin V$$

ならば $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}$ は線型独立である.

$$c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_\ell\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} = \vec{0}$$

とします. $c_{\ell+1} \neq 0$ ならば

$$\vec{v}_{\ell+1} = -\frac{1}{c_\ell + 1}\left(c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_\ell\vec{v}_\ell\right) \in L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell) = V$$

となるので矛盾が生じる. よって $c_{\ell+1} = 0$ が従う.

基底の存在 (2)

定理 6（基底の延長・拡張）$\mathbf{K}^n$ の部分空間 V, W が

$$V \subset W$$

を満たします．V の基底 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell$ に対して，W の基底

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}, \ldots, \vec{v}_{\ell+d}$$

が存在します．

次のページのプログラムは終了するか？

基底の存在 (3)

$V_\ell = V$ とします．

(ℓ) $V_\ell = W$ ならば終了．$V_\ell \subsetneq W$ ならば $\vec{v}_{\ell+1} \in W$ で $\vec{v}_{\ell+1} \notin V_\ell$ を満たすものが存在する．そこで

$$V_{\ell+1} = L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1})$$

と定義します．

($\ell+1$) $V_{\ell+1} = W$ ならば終了．$V_{\ell+1} \subsetneq W$ ならば $\vec{v}_{\ell+2} \in W$ で $\vec{v}_{\ell+2} \notin V_{\ell+1}$ を満たすものが存在する．そこで

$$V_{\ell+2} = L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{\ell+1}, \vec{v}_{\ell+2})$$

と定義します．

($\ell+2$) $V_{\ell+2} = W$ ならば終了．$V_{\ell+2} \subsetneq W$ ならば $\vec{v}_{\ell+3} \in W$ で $\vec{v}_{\ell+3} \notin V_{\ell+2}$ を満たすものが存在する．そこで

$$V_{\ell+3} = L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{\ell+2}, \vec{v}_{\ell+3})$$

と定義します．

$V = \{\vec{0}\}$, $W = V$ として上の議論を用いると定理 7 を得ます.

定理 7 $\mathbf{K}^n$ の部分空間 V が $V \neq \{\vec{0}\}$ を満たすとき，V には基底が存在します.

基底の存在 (5)

定理 6 の議論から定理 8 が従います.

定理 8 $\mathbf{K}^n$ の部分空間 V, W が

$$V \subset W$$

を満たすとします.

(i) $\dim V \leq \dim W$

(ii) $\dim V = \dim V$ ならば $V = W$

次元定理 (1)

定理 9 m 行 n 列の行列 $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して

$$\dim \ker(A) = n - \dim \mathrm{Im}(A)$$

$\ker(A)$ の基底を $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell$ とします．これを拡張して $\mathbf{K}^n$ の基底

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}, \ldots, \vec{v}_n$$

とします．任意の $\vec{w} \in \mathrm{Im}(A)$ に対して，$\vec{v} \in \mathbf{K}^n$ が存在して

$$\vec{w} = A\vec{v}$$

と表せます．このとき

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_\ell\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_n\vec{v}_n$$

と表せるので

次元定理 (2)

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= A\left(c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_\ell\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_n\vec{v}_n\right) \\ &= c_1A\vec{v}_1 + \ldots + c_\ell A\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}A\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_nA\vec{v}_n \\ &= c_{\ell+1}A\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_nA\vec{v}_n \end{aligned}$$

から $\mathrm{Im}(A)$ は

$$\vec{w}_{\ell+1} := A\vec{v}_{\ell+1},\ \ldots,\ \vec{w}_n := A\vec{v}_n$$

で生成されます．次に $\vec{w}_{\ell+1}, \ldots, \vec{w}_n$ が線型独立であることを示します．

$$\vec{0} = c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_n\vec{v}_n = A(c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_n\vec{v}_n)$$

とすると

$$c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_n\vec{v}_n \in \ker(A)$$

から

$$c_{\ell+1} = \ldots = c_n = 0$$

次元定理 (3)—応用

n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して以下は同値である.

(i) $\ker(A) = \vec{0}$

(ii) $\mathrm{Im}(A) = \mathbf{K}^n$