## テキスト演習問題

**MSF2019 第 5 章演習 5.1** テキストの定理 5.2 の (3), (4), (5), すなわち $m$ 行 $n$ 列の $A, B, C$ と $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して

$$\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)A \tag{3}$$

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A \tag{4}$$

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A + \alpha B \tag{5}$$

を証明しましょう.

**解答 (3)** $\vec{a} \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$\alpha\,(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\,\vec{a}$$

が成立することを用います. $A = (\vec{a}_1\ \dots\ \vec{a}_n)$ と列ベクトル表示をとると

$$\begin{aligned}
\alpha\,(\beta A) &= \alpha\,(\beta\vec{a}_1\ \dots\ \beta\vec{a}_n) \\
&= (\alpha\,(\beta\vec{a}_1)\ \dots\ \alpha\,(\beta\vec{a}_n)) \\
&= ((\alpha\beta)\vec{a}_1\ \dots\ (\alpha\beta)\vec{a}_n) \\
&= (\alpha\beta)\,(\vec{a}_1\ \dots\ \vec{a}_n) = (\alpha\beta)A
\end{aligned}$$

**(4)** $\vec{a} \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

が成立することを用います. $A = (\vec{a}_1\ \dots\ \vec{a}_n)$ と列ベクトル表示をとると

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)A &= (\alpha+\beta)\,(\vec{a}_1\ \dots\ \vec{a}_n) \\
&= ((\alpha+\beta)\vec{a}_1\ \dots\ (\alpha+\beta)\vec{a}_n) \\
&= (\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_1\ \dots\ \alpha\vec{a}_n + \beta\vec{a}_n) \\
&= (\alpha\vec{a}_1\ \dots\ \alpha\vec{a}_n) + \left(\beta\vec{b}_1\ \dots\ \beta\vec{a}_n\right) \\
&= \alpha\,(\vec{a}_1\ \dots\ \vec{a}_n) + \beta\,(\vec{a}_1\ \dots\ \vec{a}_n) = \alpha A + \beta A
\end{aligned}$$

**(5)** $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

が成立することを用います.

$$A = (\vec{a}_1\ \dots\ \vec{a}_n), \quad B = (\vec{b}_1\ \dots\ \vec{b}_n)$$

と列ベクトル表示をとると

$$\begin{aligned}\alpha(A+B) &= \alpha\left(\vec{a}_1+\vec{b}_1\ \dots\ \vec{a}_n+\vec{b}_n\right) \\ &= \left(\alpha\left(\vec{a}_1+\vec{b}_1\right)\ \dots\ \alpha\left(\vec{a}_n+\vec{b}_n\right)\right) \\ &= \left(\alpha\vec{a}_1+\alpha\vec{b}_1\ \dots\ \alpha\vec{a}_n+\alpha\vec{b}_n\right) \\ &= \alpha\left(\vec{a}_1\ \dots\ \vec{a}_n\right)+\beta\left(\vec{b}_1\ \dots\ \vec{b}_n\right) = \alpha A+\alpha B\end{aligned}$$

**MSF2019 第 5 章演習 5.2** $m$ 行 $n$ 列の $A$ と $\vec{x},\vec{y},\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_\ell\in\mathbf{K}^n$，$\lambda,\mu,c_1,\dots,c_\ell$ に対して

$$A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x}+\mu A\vec{y} \tag{1}$$

$$A(c_1\vec{x}_1+\cdots+c_\ell\vec{x}_\ell) = c_1A\vec{x}_1+\cdots+c_\ell A\vec{x}_\ell \tag{2}$$

を証明しましょう.

**解答 (1)**

$$A\left(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\right) = A\left(\lambda\vec{x}\right)+A\left(\mu\vec{y}\right) = \lambda\left(A\vec{x}\right)+\mu\left(A\vec{y}\right)$$

**(2)** まず

$$A\left(\vec{x}_1+\ldots+\vec{x}_\ell\right) = A\vec{x}_1+\ldots+A\vec{x}_\ell$$

が成立することを帰納的に

$$\begin{aligned}A\left(\vec{x}_1+\ldots+\vec{x}_\ell\right) &= A\left(\left(\vec{x}_1+\ldots+\vec{x}_{\ell-1}\right)+\vec{x}_\ell\right) \\ &= A\left(\vec{x}_1+\ldots+\vec{x}_{\ell-1}\right)+A\vec{x}_\ell \\ &= A\vec{x}_1+\ldots+A\vec{x}_{\ell-1}+A\vec{x}_\ell\end{aligned}$$

と示します．これを用いると

$$\begin{aligned}A(c_1\vec{x}_1+\cdots+c_\ell\vec{x}_\ell) &= A\left(c_1\vec{x}_1\right)+\ldots+A\left(c_\ell\vec{x}_\ell\right) \\ &= c_A\vec{x}_1+\ldots+c_\ell A\vec{x}_\ell\end{aligned}$$

**MSF2019 第 5 章演習 5.3** 3 次元の標準単位ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = (1\ 0\ 0),\ \mathbf{e}_2 = (0\ 1\ 0),\ \mathbf{e}_3 = (0\ 0\ 1)$$

と 3 行の行列 $X = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathbf{e}_1 X,\ \mathbf{e}_2 X,\ \mathbf{e}_3 X$$

を計算しましょう．また

$$(0\ \lambda\ 0)X,\ (1\ 0\ \lambda)X$$

も計算しましょう．

解答

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 X &= (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \mathbf{a} \\
\mathbf{e}_2 X &= (0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\
\mathbf{e}_3 X &= (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \mathbf{c} \\
(0\ \lambda\ 0)X &= (0\ \lambda\ 0) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{b} \\
(1\ 0\ \lambda)X &= (1\ 0\ \lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{c}
\end{aligned}$$

**MSF2019 第 5 章演習 5.4** 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$ に対して次の積を計算しましょう．

**(1)** $A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(2)** $A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**(3)** $A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(4)** $A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解答 **(1)**

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \end{pmatrix} = A$$

**(2)**

$$A\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}\end{pmatrix}$$

**(3)**

$$A\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \lambda\vec{a}+\vec{c}\end{pmatrix}$$

**(4)**

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \lambda\vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}$$

**MSF2019 第 5 章演習 5.5** 3 行の行列 $A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}$ に対して次の積を計算しましょう.

**(1)** $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$ **(2)** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\lambda&0&1\end{pmatrix}A$ **(3)** $\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$

解答 **(1)**

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}\\\mathbf{a}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}$$

**(2)**

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\lambda&0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\lambda&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c}\end{pmatrix}$$

**(3)**

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}$$

**MSF2018 第 5 章演習 5.6** 行ベクトル $\mathbf{x} = (p\ q\ r)$ に対して ${}^t\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ と $\mathbf{x} \cdot {}^t\mathbf{x}$ を計算しましょう.

解答

$$
\begin{aligned}
{}^t\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} (p\ q\ r) = \begin{pmatrix} p^2 & pq & pr \\ pq & q^2 & qr \\ pr & qr & r^2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x} \cdot {}^t\mathbf{x} &= (p\ q\ r) \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = p^2 + q^2 + r^2
\end{aligned}
$$