I 次の行列の積を計算しましょう.

(1) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(7)** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(8)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(10)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(11)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

解答

(1)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + \lambda y \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \lambda\vec{a} + \vec{b})$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda\vec{a}\ \vec{b})$$

(11)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b}\ \vec{a})$$

II $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してその転置行列を ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ によって定義します. $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{w}) &= (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}, \vec{w}) = x(\vec{\alpha}, \vec{w}) + y(\vec{\beta}, \vec{w}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

となる．他方

$${}^tA\vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha} \\ {}^t\vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha}\vec{w} \\ {}^t\vec{\beta}\vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix}$$

から

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{w} \right) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が従います.

III (1) 座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

によって

$$z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$$

を ξ, η で表しましょう.

(2) (1) を用いて z の最小値を求めましょう.

解答

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \end{cases}$$

から

$$x + y = \sqrt{2}\xi, \quad xy = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$$

となります．従って

$$\begin{aligned} z &= (x+y)^2 - xy - x - 2y \\ &= 2\xi^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \\ &= \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\eta \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{3}{16} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{7}{16} \end{aligned}$$

から $\xi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，すなわち $x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$ のとき z は最小値 $-\frac{7}{16}$ をとります.

IV

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y$$

に対して，平行移動の座標変換を用いて1次の項のない形にしましょう．

解答 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) \end{aligned}$$

と展開できます．ここで

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A\vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} A^{-1} \vec{b} = -\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha}) &= -\frac{1}{2}(\vec{b},\vec{\alpha}) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix},\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

から

$$z=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\frac{2}{3}$$

となります.

V 次の行列の逆行列を求めましょう.

(1) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(5)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(6)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **(7)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

解答

(1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ から

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

となります.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - (-1)\cdot 1 = 2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - \lambda\cdot 0 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot\lambda = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(7) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

VI

$$z = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$$

に対して，平行移動の座標変換を用いて 1 次の項のない形にしましょう．

解答 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + 32$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) \\ &\qquad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \end{aligned}$$

と展開できます．ここで

$$\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A\vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha}\right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 &= -\frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + 32 = 70 \end{aligned}$$

から

$$z = \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + 70$$

となります.

VII $a > 0,\ ab - c^2 > 0$ のとき

$$ax^2 + 2cxy + by^2 > 0 \qquad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2$$

となります．ここで $a > 0,\ ab - c^2 > 0$ から

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0$$

であることが分かります．さらにこの不等式における等号成立の必要十分条件は

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = 0, \quad \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0$$

すなわち

$$x + \frac{c}{a}y = y = 0 \quad i.e. \quad x = y = 0$$

ですから，$x \neq 0$ または $y \neq 0$ が成立するとき

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 > 0$$

となります．

VIII $A=(\vec{a}\ \vec{b})$ は 2 次正方行列であるとします．

$$\varphi\colon\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2\quad\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

が全射とします．このとき $|A|=|\vec{a}\ \vec{b}|\neq 0$ が成立することを証明しましょう．

解答 主張の対偶，すなわち $|A|=|\vec{a}\ \vec{b}|=0$ ならば φ が全射でないことを証明します．もし $A=O_2$ ならば $\mathrm{Im}(\varphi)=\{\vec{0}\}$ となりますから，φ は全射でないことが分かります．以下では $A\neq O_2$ であると仮定します．$|\vec{a}\ \vec{b}|=0$ から $\vec{a}\parallel\vec{b}$ すなわち，ある $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が存在して

$$c_1\vec{a}+c_2\vec{b}=\vec{0}$$

が成立します．以下 $c_1\neq 0$ の場合を考えます．このとき

$$\vec{a}=-\frac{c_2}{c_1}\vec{b}$$

が成立します．もし $\vec{b}=\vec{0}$ ならば $\vec{a}=\vec{0}$ となりますから，$A=O_2$ となります．従って $\vec{b}\neq\vec{0}$ であることが分かります．このとき $\vec{c}\not\vec{0}$ で $\vec{b}\nparallel\vec{c}$ を満たすものが存在します．

ここでもし φ が全射であるとすると

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$$

を満たす $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$ が存在します．このとき

$$\vec{c}=x\cdot\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\vec{b}+y\vec{b}=\left(-\frac{xc_2}{c_1}+y\right)\vec{b}$$

となりますから $\vec{b}\parallel\vec{c}$ となって矛盾が生じます．よって φ が全射ではあり得ないことが示されました．

<u>注意</u>　解答で証明をしないで用いたことについて注意します．$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ のとき

$$\begin{vmatrix}1&b_1\\0&b_2\end{vmatrix}=b_1\neq 0\quad\text{または}\quad\begin{vmatrix}0&b_1\\1&b_2\end{vmatrix}=b_2\neq 0$$

が成立しますから

$$\vec{e}_1\nparallel\vec{b}\quad\text{または}\quad\vec{e}_2\nparallel\vec{b}$$

が成立します．