

演習問題解答

演習 3.2

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

に対して、以下を求めましょう。

- (1) \vec{a} と \vec{b} が張る平行四辺形の面積.
- (2) \vec{a} と \vec{b} に直交する単位ベクトル.
- (3) \vec{a} と \vec{b} , \vec{c} が張る平行六面体の体積.

解答 (1)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となりますから \vec{a} と \vec{b} の張る平行四辺形の面積 S は

$$S = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{3}$$

- (2) $\vec{a} \times \vec{b}$ が \vec{a} と \vec{b} に垂直ですから、大きさを 1 にした

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める単位ベクトルです。

- (3) 求める体積を V にすると

$$V = abc \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

となります。他方

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

から $V = 4$ であることが分かります。

演習 3.3

$$\|\vec{x} \pm \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \pm 2(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \quad (3.26)$$

を示しましょう.

解答

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \quad ((3.27) \text{ から}) \\ &= (\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \quad ((3.10) \text{ から}) \\ &= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) \quad ((3.11) \text{ から}) \\ &= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \quad ((3.12) \text{ から}) \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \quad ((3.13) \text{ から}) \end{aligned}$$

ここで $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, \vec{x}) \quad (3.27)$$

が成立することを用いています.

演習 3.4 以下の補助定理を用いて

$$\left| \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \right| = \lambda \left| \vec{\alpha} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \right| + \mu \left| \vec{\beta} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \right| \quad (3.28)$$

を示しましょう.

補助定理 $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} \quad \vec{x} \mapsto a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ は

$$F(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

を満たします.

解答

$$|\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}| = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

が成立しますから

$$F(\vec{x}) = |\vec{x} \quad \vec{b} \quad \vec{c}|$$

と定めると

$$C_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_2 = - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

に対して

$$F(\vec{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$$

となります。従って補助定理から

$$\begin{aligned} |\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \ \vec{b} \ \vec{c}| &= F(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}) \\ &= \lambda F(\vec{\alpha}) + \mu F(\vec{\beta}) \\ &= \lambda|\vec{\alpha} \ \vec{b} \ \vec{c}| + \mu|\vec{\beta} \ \vec{b} \ \vec{c}| \end{aligned}$$

となります。

演習 3.5 次の行列式の値を求めましょう。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -12 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -12 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

(4)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)((c+a) - (b+a)) \\ &= (a-b)(c-a)(a-c) \end{aligned}$$

演習 3.6

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \dots \text{(I)} = (1) \times c_2 - (2) \times c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots \text{(II)} = (1) \times c_3 - (3) \times c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots \text{(III)} = (2) \times c_3 - (3) \times c_2$$

において $a_1 \times (\text{III}) - a_2 \times (\text{II}) + a_3 \times (\text{I})$ を計算して、クラメールの公式の y の公式を導きましょう。

解答

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \dots \text{(I)}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots \text{(II)}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots \text{(III)}$$

において $a_1 \times (\text{III}) - a_2 \times (\text{II}) + a_3 \times (\text{I})$ を計算すると

$$\begin{aligned} & \left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) x \\ & + \left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) y \\ & = \left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) x \end{aligned}$$

となりますが、第 2 列の余因子展開と考えると

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_1 & c_1 \\ \alpha_2 & a_2 & c_2 \\ \alpha_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

から

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

となります。これから $|\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}| \neq 0$ を用いて

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

が導けます。

演習 3.7 次の連立1次方程式をクラメールの公式を用いて解きましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

からクラメールの公式を適用できて

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 7 & -13 \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{49}{10} \\ y &= \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \\ z &= \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

からクラメールの公式を適用できて,

$$x = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = -\frac{13}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$z = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$