I $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + 2(\vec{a},\vec{c})$$

が成立することを示しましょう.（「線型代数学」教科書 13 ページ，演習 1.17）

解答　公式

$$||\vec{a}+\vec{b}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + ||\vec{b}||^2$$

を用います.

$$\begin{aligned} ||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 &= ||\vec{a}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) + ||\vec{b}+\vec{c}||^2 \\ &= ||\vec{a}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{a},\vec{c}) + ||\vec{b}||^2 + 2(\vec{b},\vec{c}) + ||\vec{c}||^2 \\ &= ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + 2(\vec{c},\vec{a}) \end{aligned}$$

II $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直，すなわち

$$(\vec{a},\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a} = \vec{0}$ となることを示しましょう.（「線型代数学」教科書 13 ページ，演習 1.19）

解答

III $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3} \in \mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f_i}, \vec{f_j}) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします.

(1)

$$||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 = x^2 + y^2$$

$$||x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

を示しましょう.

(2)　$\vec{g} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2}||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g},\vec{f_1}) - 2y(\vec{g},\vec{f_2})$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned}||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||^2 &= ||x\vec{f_1}||^2+2(x\vec{f_1},y\vec{f_2})+||y\vec{f_2}||^2\\ &= x^2||\vec{f_1}||^2+2xy(\vec{f_1},\vec{f_2})+y^2||\vec{f_2}||^2\\ &= x^2\cdot 1+2xy\cdot 0+y^2\cdot 1=x^2+y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}+z\vec{f_3}||^2 &= ||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||+2(x\vec{f_1}+y\vec{f_2},z\vec{f_3})+||z\vec{f_3}||^2\\ &= x^2+y^2+2xz(\vec{f_1},\vec{f_3})+2yz(\vec{f_2},\vec{f_3})z^2\cdot 1\\ &= x^2+y^2+2xz\cdot 0+2yz\cdot 0+z^2\cdot 1=x^2+y^2+z^2\end{aligned}$$

解答 (2)

$$\begin{aligned}||\vec{g}-x\vec{f_1}-y\vec{f_2}||^2 &= ||\vec{g}||^2-2(\vec{g},x\vec{f_1}+y\vec{f_2})+||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||^2\\ &= ||\vec{g}||^2-2x(\vec{g},\vec{f_1})-2y(\vec{g},\vec{f_2})+x^2+y^2\\ &= ||\vec{g}||^2+x^2+y^2-2x(\vec{g},\vec{f_1})-2y(\vec{g},\vec{f_2})\end{aligned}$$

注意 さらに

$$\begin{aligned}&||\vec{g}||^2+x^2+y^2-2x(\vec{g},\vec{f_1})-2y(\vec{g},\vec{f_2})\\ &=\Big(x-(\vec{g},\vec{f_1})\Big)^2+\Big(y-(\vec{g},\vec{f_2})\Big)^2+||\vec{g}||^2-(\vec{g},\vec{f_1})^2-(\vec{g},\vec{f_2})^2\end{aligned}$$

から $||\vec{g}-x\vec{f_1}-y\vec{f_2}||^2$ は $x=(\vec{g},\vec{f_1}), y=(\vec{g},\vec{f_2})$ において最小値 $||\vec{g}||^2-(\vec{g},\vec{f_1})^2-(\vec{g},\vec{f_2})^2||$ をとることが分かります.

IV

$$\begin{cases}x+y-z=1\\ 2x-y+z=-1\end{cases}$$

を満たす (x,y,z) に対してクラメールの公式を用いて x,y を z で表しましょう.

解答

$$\begin{cases}x+y &= z+1\\ 2x-y &= -z-1\end{cases}$$

をクラメールの公式を用いて x,y について解くと

$$x=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}\cdot\begin{vmatrix}z+1 & 1\\ -z-1 & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot 0$$

$$y = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & z+1 \\ 2 & -z-1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(-3z-3) = z+1$$

V

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して $||\vec{a} - t\vec{b}||^2$ を最小にする t を求めましょう.

解答

$$||\vec{a}||^2 = 1+4+9+16 = 30, \quad (\vec{a}, \vec{b} = 1 + (-2)) + 3 + 4 = 6, \quad ||\vec{b}||^2 = 1+1+1+1 = 4$$

となります.

$$\begin{aligned} ||\vec{a} - t\vec{b}||^2 &= ||\vec{a}||^2 - 2t(\vec{a}, \vec{b}) + t^2||\vec{b}||^2 \\ &= 4t^2 - 12t + 30 \\ &= 4\left(t - \frac{3}{2}\right) + 30 - 9 = 4\left(t - \frac{3}{2}\right) + 21 \end{aligned}$$

から

$$t = \frac{3}{2} \quad \text{のとき最小値} \quad 21$$

をとります.

VI

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ であることを示しましょう.

(2) $||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2$ を最小にする x, y を求めましょう.

解答 **(1)**

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0$$

(2)

$$\begin{aligned}||\vec{g}-x\vec{a}-y\vec{b}||^2 &= ||\vec{g}||^2-2(\vec{g},x\vec{a}+y\vec{b})+||x\vec{a}+y\vec{b}||^2\\ &= ||\vec{g}||^2-2(\vec{g},x\vec{a}+y\vec{b})+x^2||\vec{a}||^2+y^2||\vec{b}||^2\\ &= 1-2x+2y+3x^2+6y^2\\ &= 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+6\left(y+\frac{1}{6}\right)^2+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\\ &= 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+6\left(y+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}\end{aligned}$$

において最後の等号成立条件は $x=\frac{1}{3},\ y=-\frac{1}{6}$ であるので $||\vec{g}-x\vec{a}-\vec{b}||^2$ は

$$x=\frac{1}{3},\ y=-\frac{1}{6}\quad \text{のとき}\quad \text{最小値}\frac{1}{2}$$

をとります.

VIII $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R}^3$ とします．このとき

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

とします．このとき

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\begin{vmatrix}b_2 & a_2\\b_3 & a_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}b_1 & a_1\\b_3 & a_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}b_1 & a_1\\b_2 & a_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

さらに $\vec{a}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{a}$ から $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ が従います．

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
+ \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}
\end{aligned}
$$

IX

直線 ℓ_1

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 3x-2y+z+5=0 \end{cases}$$

直線 ℓ_2

$$\begin{cases} x-z+1=0 \\ 3x+2y-z+2=0 \end{cases}$$

があります．原点を通り直線 ℓ_1, ℓ_2 に交わる直線を求めましょう．

解答直線 ℓ_1 と原点を含む平面 π_1 は

$$5(x+y+z+1)-(3x-2y+z+5)=0 \quad \text{すなわち} \quad 2x+7y+4x=0 \tag{1}$$

他方，直線 ℓ_2 と原点を含む平面 π_2 は

$$2(x-z+1)-(3x+2y-z+2)=0 \quad \text{すなわち} \quad -x-2y-z=0 \tag{2}$$

であることが分かります．π_1 と π_2 の交わりは (1) かつ (2) を解いて

$$x=\frac{1}{3}z, \quad y=-\frac{2}{3}z \tag{3}$$

となる．この直線を ℓ とすると，ℓ が求める直線である．実際 ℓ_1 の方向ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は π_1 に平行で

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が成立しますから π_1 中 ℓ_1 と ℓ は交わります．他方，ℓ_2 の方向ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は π_2 に平行で

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 55 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が成立しますから π_2 中 ℓ_2 と ℓ は交わります．よって ℓ は原点を通り，ℓ_1 と ℓ_2 と交わります.

X 次の 3 点を通る平面の方程式を求めましょう.
(1)　$(0,0,0)$, $(1,2,3)$, $(4,5,6)$
(2)　$(2,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,4)$
(3)　$(1,2,3)$, $(-1,1,0)$, $(2,-3,5)$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から原点を通り法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるので，求める平面の方程式は

$$x - 2y + z = 0$$

であることが分かります.
(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 0$$

は平面を表して，与えられた 3 点を通るので，これが求める方程式となります．

(3)

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\1\\11\end{pmatrix}$$

から平面の法線ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix}-17\\1\\11\end{smallmatrix}\right)$ であることが分かります．これから求める平面の方程式は

$$-17(x-1+(y-2))+11(z-3)=0$$

となります．

XI $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ とします．平面

$$ax+by+cz+q=0$$

と点 (x_0,y_0,z_0) の距離 δ は

$$\delta=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+q|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

となることを示しましょう．

解答 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ を通り方向ベクトルが $\left(\begin{smallmatrix}a\\b\\c\end{smallmatrix}\right)$ の直線 ℓ と平面

$$\pi:\ ax+by+cz+q=0 \tag{1}$$

の交点 P_1 の座標を求めます．直線 ℓ の上の点の座標は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+at\\y_0+bt\\z_0+ct\end{pmatrix}$$

となりますから，(1) に代入して

$$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)=0$$

から

$$t=-\frac{az_0+by_0+cz_0}{a^2+b^2+c^2} \tag{3.18}$$

であることが分かります．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

なので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}\right| = |t|\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{|az_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

であることが分かります．