第3章　座標空間と数ベクトル

3.1　クラメールの公式・ベクトルの平行

連立1次方程式

$$\begin{cases} ax + by = \alpha_1 & (1) \\ cx + dy = \alpha_2 & (2) \end{cases}$$

を考えます．(1) $\times d -$ (2) $\times b$ と (1) $\times c -$ (2) $\times a$ を考えるとを計算すると

$$(ad - bc)x = \alpha_1 d - \alpha_2 b, \quad (bc - ad)y = \alpha_1 c - \alpha_2 a$$

を得ます.

ここで2次の**行列式** (*determinant*) を

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{3.1}$$

と定めると，この2式は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b \\ \alpha_2 & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha_1 \\ c & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

となります．ここで

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

を仮定すれば

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b \\ \alpha_2 & d \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

および

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & \alpha_1 \\ c & \alpha_2 \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

と計算されます．この公式を**クラメールの公式** (*Cramer's rule*) と呼びます.

特に $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ のとき

$$\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

が成立しますから

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \left(\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \right)$$

が成立することが示されました．実はこの逆も成立します．

定理 3.1．(1)

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \right)$$

(2)

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \exists (x, y) \neq (0, 0) \left(\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \right)$$

Proof. **(2)** において

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0 \Rightarrow \exists (x, y) \neq (0, 0) \left(\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \right)$$

を示せば十分です．これは以下のように場合分けをして示せます．

(i) $(a, b) \neq (0, 0)$ のとき

$$ad - bc = 0$$

を用いると $(x, y) = (-b, a) \neq (0, 0)$ が連立 1 次方程式を満たします．

(ii) $(c, d) \neq (0, 0)$ のとき

$$ad - bc = 0$$

を用いると $(x, y) = (d, -c) \neq (0, 0)$ が連立 1 次方程式を満たします．

(iii) (i) でも (ii) でもないとき $a = b = c = d = 0$ が成立しますから，この場合は明らかでしょう． □

ここで

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 \\ xa_2 + yb_2 \end{pmatrix}$$

であることに注意すると定理 3.1 は次のように言い換えることができます．

定理 3.2. (1)

$$|\vec{a}\ \vec{b}| \neq 0 \Leftrightarrow \left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \lambda=\mu=0\right)$$

(2)

$$|\vec{a}\ \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\neq(0,0)\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}\right)$$

以下

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \Leftrightarrow \left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \lambda=\mu=0\right)$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\neq(0,0)\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}\right)$$

によってベクトルの非平行，平行を定義します.（この定義は n 次元列ベクトル，n 次元行ベクトルでもそのまま使えることに注意しましょう.）

ここで

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

が成立することに注意すると，行ベクトル

$$\mathbf{a}=(a_1\ a_2),\quad \mathbf{b}=(b_1\ b_2)$$

に対しても

$$\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

が成立することが分かります.

3.2　平面の交わり

2 平面の交わり

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=\alpha_1 & (1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=\alpha_2 & (2) \end{cases}$$

を考えます．(1) と (2) の法線ベクトルについて

$$\vec{p}_1=\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}\neq\vec{0},\quad \vec{p}_2=\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

が成立するとします．さらに

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

を仮定すると，クラメールの公式を用いて

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -c_1 z + \alpha_1 & b_1 \\ -c_2 z + \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 z + \alpha_1 \\ a_2 & -c_2 z + \alpha_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

が従います．ここで行列式について次の定理が成立することを用いています．

定理 3.3. (i) （各列の線型性）

$$|\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\ \vec{b}| = \lambda|\vec{x}\ \vec{b}| + \mu|\vec{y}\ \vec{b}|$$

$$|\vec{a}\ \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}| = \lambda|\vec{a}\ \vec{x}| + \mu|\vec{a}\ \vec{y}|$$

(ii) （交代性） $|\vec{a}\ \vec{b}| = -|\vec{b}\ \vec{a}|$
(ii)' （交代性）$|\vec{a}\ \vec{a}| = 0$

さらに $t = \frac{z}{D}$ とパラメータを定めると，上の結果をベクトルで表すことによって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と 2 直線の交わりは直線としてパラメータ表示される．そして

$$\vec{p_1} \times \vec{p_2} := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

が直線の方向ベクトルとなることに注意しよう．このベクトルを $\vec{p_1}$ と $\vec{p_2}$ の**外積**と呼びます．ここで $\vec{p_1}$ と $\vec{p_2}$ が直線を定める 2 平面の法線ベクトルであることを思い出すと，直感的には

$$(\vec{p_1}, \vec{p_1} \times \vec{p_2}) = (\vec{p_2}, \vec{p_1} \times \vec{p_2}) = 0 \tag{3.4}$$

が分かることにも注意しましょう．代数的にも (3.7) で示します．

ここで $\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \neq \vec{0}$ すなわち

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{OR} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{OR} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

を仮定すると

$$\begin{cases} a_1\lambda + a_2\mu = 0 \\ b_1\lambda + b_2\mu = 0 \\ c_1\lambda + c_2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

すなわち

$$\lambda\vec{p}_1 + \mu\vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

が成立することに注意しましょう．従って

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$$

が示されました．実はさらにこの逆も成立します．

定理 3.4. (1)

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$$

(2)

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$$

$||\vec{p}_1 \times \vec{p}_2||$ が $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ によって定められる平行四辺形の面積 S であること

$$S = ||\vec{p}_1 \times \vec{p}_2||$$

（(3.9) 参照）を用いると，示すべき「逆」

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$$

は直感的に明らかです．しかし代数的に示すのはこの時点では無手勝に示すことになるので少し複雑となりますが，将来的に

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^t A)$$

が行列 A に対して成立することと関連して示されます．

3.3 3次元ベクトルの外積・3次の行列式

3.3.1 定義

3次元ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

に対して，行列式（スカラー 3 重積）を

$$\begin{aligned}
|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})
\end{aligned}$$

さらに 2 次の行列式を展開すると

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \tag{3.5}$$

となります．ここで

$$i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i,\ i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

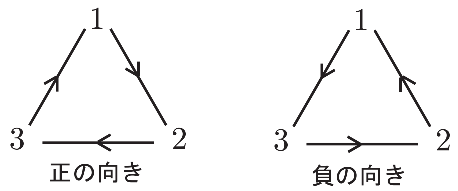
を満たす $(i\ j\ k)$ 全体を S_3 とすると，$(i\ j\ k) \in S_3$ に対してだけ

$$a_ib_jc_k$$

が現れていることに注意しましょう．このような $(i\ j\ k)$ は $3! = 6$ 通りであることが分かります．$a_ib_jc_k$ の前の符号に関しては

$$i \longrightarrow j \longrightarrow k \longrightarrow i$$

が正の向きの場合に正であり，負の場合に負であることも分かります．



ここで $i \neq j,\ j \neq k, k \neq i$ を満たす $(i\ j\ k) \in S_3$ に対して

$$\varepsilon(i\ j\ k) = \begin{cases} +1 & ((i\ j\ k)\text{が正の向き}) \\ -1 & ((i\ j\ k)\text{が負の向き}) \end{cases}$$

と定めます．これを用いると上の 3 次正方行列 $A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して

$$\det(A) = \sum_{i\neq j,\ j\neq k, k\neq i} \varepsilon(i\ j\ k) \cdot a_ib_jc_k \tag{3.6}$$

が成立することに注意しましょう．

次に (3.5) において b_1, b_2, b_3（または c_1, c_2, c_3）について整理すると，次の各列に関する**余因子展開**が成立することにも注意しよう．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

3 次の行列式の基本性質については後に詳細を述べますが，以下ですぐに必要になる性質についてまとめましょう．

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ に対して以下が成立します．

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = -|\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}| = -|\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}| = -|\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}|$$

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{b}| = |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}| = |\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{c}| = 0$$

これらは 2 次の行列式の交代性（定理 3.3）と余因子展開を用いて示せます．

3.3.2 ベクトルの外積・行列式の幾何学的な意味

ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の**外積**（**ベクトル積**）を右のように定めました．外積 $\vec{b} \times \vec{c}$ は

$$\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}, \qquad \vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c} \tag{3.7}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

を満たすことを (3.4) で直観的に説明してあります．厳密にこのことを示すために公式

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) \tag{3.8}$$

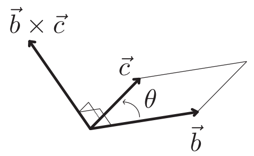
が成立することに注意します．この公式を用いると

$$(\vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{c}| = 0$$

が従い，$\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ が分かります．また $\vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ も同様です．

次に $\vec{b}\times\vec{c}$ の大きさについて注意します．2本のベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が定める平行四辺形の面積 S について考えます．$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ とします．このとき

$$\begin{aligned} S &= ||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||\cdot\sin\theta \\ &= ||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= ||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||\cdot\sqrt{1-\left(\frac{(\vec{b},\vec{c})}{||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||}\right)^2} \\ &= \sqrt{||\vec{b}||^2\cdot||\vec{c}||^2-(\vec{b},\vec{c})^2} \end{aligned}$$



から

$$\begin{aligned} S^2 &= ||\vec{b}||^2\cdot||\vec{c}||^2-(\vec{b},\vec{c})^2 \\ &= \left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2 \\ &= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2=||\vec{b}\times\vec{c}||^2 \end{aligned}$$

を得ます．すなわち

$$S=||\vec{b}\times\vec{c}|| \tag{3.9}$$

を示しました．$\vec{b}$ と $\vec{c}$ に垂直で大きさが S であるベクトルは2本ありますが，そのどちらが $\vec{b}\times\vec{c}$ になるのについて軽く説明します．座標系が**右手系**の場合は，$\vec{b}$ から $\vec{c}$ へ右手の親指以外の4本の指を揃えて向かうときに親指が向かう方向が $\vec{b}\times\vec{c}$ です（**右ねじの向き**）．また座標系が**左手系**の場合は，同じことを左手で行います.（前ページの図は，右手系の場合を考えています.）詳しくは述べられませんが (3.8) を用いて得られる

$$\det(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{b}\times\vec{c})=||\vec{b}\times\vec{c}||^2>0$$

が $\vec{b}\times\vec{c}\neq\vec{0}$ であるときに成立することから，$\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{b}\times c$ が標準単位ベクトルを用いた $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ と同じ「向き」を持ちます．このことから以上の事実が示せます．

公式 (3.9) を用いて，3次の行列式の幾何的な性質について説明します．3本のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が定める平行6面体の体積を V とします．$\vec{b}$, $\vec{c}$ が定める平行四辺形を底面として体積 V を考えます．すると垂直方向 $\vec{b}\times\vec{c}$ と $\vec{a}$ とのなす角を φ とすると，高さ h は

$$h=|\ ||\vec{a}||\cdot\cos\varphi\ |=\left|||\vec{a}||\cdot\frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{a}||\cdot||\vec{b}\times\vec{c}||}\right|=\left|\frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{b}\times\vec{c}||}\right|$$

と計算されます．これから

$$V = S \cdot h = ||\vec{b} \times \vec{c}|| \cdot \left| \frac{(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})}{||\vec{b} \times \vec{c}||} \right| = \left| (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) \right| = \left| \det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \right|$$

となります．

演習 3.1. ベクトルの外積について以下の性質が成立することを示しましょう．
(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},\quad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$　**(2)** $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
(3) $(\lambda \vec{a}) \times b = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$

演習 3.2. $\vec{a} = {}^t(1\ 1\ 0)$, $\vec{b} = {}^t(0\ 1\ -1)$, $\vec{c} = {}^t(1\ 2\ 3)$ に対して，以下を求めましょう．
(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積．　**(2)** $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交する単位ベクトル．
(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$, $\vec{c}$ が張る平行六面体の体積．

3.4　内積・直交射影

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n,$$

に対して $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

と定めます．さらに $\vec{x}$ の大きさ（ノルム）を

$$||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

と定めます．
　ベクトルの内積と大きさについては次の定理が成立します．

定理 3.5. $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \mathbf{R}^n$ と $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z}) \tag{3.10}$$

$$(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z}) \tag{3.11}$$

$$(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y}) \tag{3.12}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}) \tag{3.13}$$

$$||\lambda \vec{x}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{x}|| \tag{3.14}$$

$$||\vec{x}|| \geqq 0, \quad ||\vec{x}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \tag{3.15}$$

さらに定理3.5を用いて

$$||\vec{x} \pm \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 \pm 2(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \tag{3.16}$$

を示すことができます.

演習 3.3. (3.16) を示しましょう.

最後に $\vec{x} \neq 0$ のとき

$$f(t) = ||\vec{y} - t\vec{x}||^2$$

の最小値を求めてみましょう.

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2||\vec{x}||^2 - 2t(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 \left(t^2 - 2\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2} t + \frac{||\vec{y}||^2}{||\vec{x}||^2} \right) \\ &= ||\vec{x}||^2 \left\{ \left(t - \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2} \right)^2 + \frac{||\vec{y}||^2}{||\vec{x}||^2} - \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{||\vec{x}||^4} \right\} \end{aligned}$$

ですから $t = t_0 := \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2}$ であるときに $f(t)$ は最小値

$$||\vec{y}||^2 - \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{||\vec{x}||^2} = \frac{1}{||\vec{x}||^2} \left(||\vec{x}||^2 ||\vec{y}||^2 - (\vec{x}, \vec{y})^2 \right) \tag{3.17}$$

をとります．さらに

$$\begin{aligned} (\vec{y} - t_0\vec{x}, \vec{x}) &= (\vec{y}, \vec{x}) - t_0||\vec{x}||^2 \\ &= (\vec{y}, \vec{x}) - \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2}||\vec{x}||^2 = 0 \end{aligned}$$

から

$$\vec{y} - t_0\vec{x} \perp \vec{x}$$

であることが分かります.

$$t_0\vec{x} = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2}\vec{x}$$

を $\vec{y}$ の $\vec{x}$方向への正射影(直交射影)と呼びます.

さらに

$$0 \leq ||\vec{y} - t_0\vec{x}||^2 = \frac{||\vec{x}||^2 \cdot ||\vec{y}||^2 - (\boldsymbol{x}, \vec{y})^2}{||\vec{x}||^2}$$

から次の定理を得ます.

定理 3.6. **（コーシー・シュヴァルツの不等式）** $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$$

が成立します.

演習問題

I $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + 2(\vec{a},\vec{c})$$

が成立することを示しましょう.（「線型代数学」教科書 13 ページ，演習 1.17）

II $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直，すなわち

$$(\vec{a},\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a} = \vec{0}$ となることを示しましょう.（「線型代数学」教科書 13 ページ，演習 1.19）

III $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \in \mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします.

(1)

$$||x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2||^2 = x^2 + y^2$$

$$||x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 + z\vec{f}_3||^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

を示しましょう.

(2)　$\vec{g} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{g} - x\vec{f}_1 - y\vec{f}_2||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g},\vec{f}_1) - 2y(\vec{g},\vec{f}_2)$$

が成立することを示しましょう.

IV

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$$

を満たす (x,y,z) に対してクラメールの公式を用いて x, y を z で表しましょう.

V

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して $||\vec{a} - t\vec{b}||^2$ を最小にする t を求めましょう.

VI

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします．

(1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ であることを示しましょう．

(2) $||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2$ を最小にする x, y を求めましょう．

VII

(1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a}, \vec{b}$ が作る平行四辺形の面積は

$$||\vec{a} \times \vec{b}||$$

であることを示しましょう．また

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

であることを示しましょう．

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が作る平行四面体の体積は

$$|(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|$$

であることを示しましょう．

VIII $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします．このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},\ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

が成立することを示しましょう．

IX

直線 ℓ_1

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

直線 ℓ_2

$$\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 3x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

があります．原点を通り直線 ℓ_1, ℓ_2 に交わる直線を求めましょう．

X 次の 3 点を通る平面の方程式を求めましょう．

(1) $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$

(2) $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 4)$

(3) $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 0)$, $(2, -3, 5)$

XI $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．平面

$$ax + by + cz + q = 0$$

と点 (x_0, y_0, z_0) の距離 δ は

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となることを示しましょう．