I $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

を示しましょう.

解答

$$z = a + ib, \quad w = c + id \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

と z と w の実部と虚部を表します．このとき

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

から

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 \\ & b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2 \end{aligned}$$

$$a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2 \cdot |w|^2$$

が従います．$|z|, |w|, |zw| \geq 0$ なので両辺の平方根をとると

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

であることが分かります.

II(1) $a, b \in \mathbf{R}$ が $a, b \geq 0$ を満たすとします.

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

を示しましょう.

(2) $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$ が

$$a_1, \cdots, a_n \geq 0$$

を満たすとします.

$$a_1 + \cdots + a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$$

が成立することを示しましょう.

解答 **(1)** $(\Rightarrow)$ は明らかですから $(\Leftarrow)$ を証明します.

$a > 0$ とすると $b = -a < 0$ となりますから $b \geq 0$ に反します．同様に $b > 0$ とすると $a = -b < 0$ となりますから $a \geq 0$ に反します．よって

$$a = b = 0$$

であることが分かります．
(2) $(\Rightarrow)$ は明らかですから $(\Leftarrow)$ を証明します．帰納法を用いて証明しますから $n-1$ で成立するとします．

$$a_1 + \ldots + a_{n-1} \geq 0, \quad a_n \geq 0$$

が成立しますから (1) を用いると $a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$ から

$$a_1 + \ldots + a_{n-1} = 0, \quad a_n = 0$$

が従います．(n-1) の場合（帰納法の仮定）を用いると $a_1 + \ldots + a_{n-1} = 0$ から

$$a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$$

も従います．以上で $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ の下で

$$a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0 \quad \Leftarrow \quad a_1 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$$

が従うことを示しました．

III (1) $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

を示しましょう．
(2) $z \in \mathbf{C},\ z \neq 0$ のとき

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

を示しましょう．
(3) $z \in \mathbf{C}$ であるとき

$$z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$

を示しましょう．

解答

$$z = a + ib, \quad w = c + id \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

と z と w の実部と虚部を表します．このとき

$$z \pm w = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

から

$$\begin{aligned}\overline{z \pm w} &= (a \pm c) - i(b \pm d)\\ \overline{z} \pm \overline{w} &= \overline{a + ib} \pm \overline{c + id}\\ &= (a - ib) \pm (c - di)\\ &= (a \pm c) - i(b \pm d)\end{aligned}$$

から

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$$

が従います．次に

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + i(bc + ad)}\\ &= (ac - bd) - i(bc + ad)\\ \overline{z} \cdot \overline{w} &= (a - ib)(c - id)\\ &= (ac - bd) - i(bc + ad)\end{aligned}$$

から

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

が従います．最後に

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

から

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}$$

が分かります．他方

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a - ib} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}$$

が分かりますから

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

が従います．

(3) $z = a + ib \quad (a, b \in \mathbf{R})$ とします．$z = a \in \mathbf{R}$ とすると

$$\overline{z} = a = z$$

から $z = \overline{z}$ が従います．逆に $z = \overline{z}$ とすると

$$a + ib = a - ib \quad \text{から} \quad b = 0$$

が従いますから，$z = a \in \mathbf{R}$ であることが分かります．

III(4) 実係数の多項式

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

を考えます．すなわち上の式において

$$a_0, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$$

とします．このとき $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\overline{\alpha}) = 0$$

を示しましょう．

解答 $f(\alpha) = 0$ すなわち

$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \tag{1}$$

が成立するとします．

$$\overline{\alpha^k} = (\overline{\alpha})^k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

が成立することを帰納的に示せますから，(1) の両辺の複素共役をとると

$$\begin{aligned}\overline{a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0} &= \overline{a_n} \cdot \overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_0} \\ &= a_n \cdot \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 \\ &= f(\overline{\alpha}) = 0\end{aligned}$$

が分かります．

IV $P_1(x), P_2(x) \in \mathbf{K}[x]$ に対して

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = 0 \Rightarrow P_1(x) = 0 \text{ または } P_2(x) = 0$$

であることを示しましょう．

解答 P_1, P_2 が $\deg(P_1), \deg(P_2) \geq 0$ とすると

$$\deg(P_1 P_2) = \deg(P_1) + \deg(P_2) \geq 0$$

となり，$P_1 P_2 = 0$ となりません．従って

$$\deg(P_1) = -\infty \quad \text{または} \quad \deg(P_2) = -\infty$$

すなわち

$$P_1 = 0 \quad \text{または} \quad P_2 = 0$$

となります.

V $z, w \in \mathbf{C}$ が $z, w \neq 0$ を満たしているとします.

$$z = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad w = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

と極形式で表されるとき

$$zw = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z^{-1} = r_1^{-1}(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$$

となることを示しましょう.

解答

$$\begin{aligned}
zw &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right) \\
&= r_1 r_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)} \\
&= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\cos\theta_1 - i\sin\theta_1}{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)} \\
&= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)}{\cos^2\theta_1 + \sin\theta_1^2} = \frac{1}{r_1} \cdot (\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))
\end{aligned}$$

VI

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \neq 1$$

であるとき

$$z^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$$

とします．このとき

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{z^{n+1}-1}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})}$$

であることを用いて

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta, \quad \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta$$

を求めましょう．

解答 $z = \cos\theta + i\sin\theta \neq 1$ のとき帰納法を用いると

$$z^k = \cos k\theta + i\sin k\theta \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

が成立することが分かります．さらに

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta + i\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta &= \sum_{k=0}^{n}(\cos k\theta + i\sin k\theta) \\
&= \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \\
&= \frac{z^n - 1}{z^{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{z^{\frac{n+1}{2}}\left(z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}\right)}{z^{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right)} = z^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \left(\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right) \cdot \frac{2\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} + i\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

から

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}, \quad \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

であることが分かります．

VII(1) $\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \alpha \neq \gamma$ とします．このとき

$$g(x) = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

が

$$g(\alpha) = 1, \quad g(\beta) = g(\gamma) = 0$$

を満たすことを示しましょう．
(2) (1) において $A, B, C \in \mathbf{C}$ とします．f が 2 次多項式で

$$f(\alpha) = A,\ f(\beta) = B,\ f(\gamma) = C$$

ならば

$$f(x) = A\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + B\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + C\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

となることを示しましょう．

解答 **(1)** 省略
(2)

$$h(x) = A\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + B\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + C\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

と定義します．このとき

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = A \\ h(\beta) &= A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 = B \\ h(\gamma) &= A \cdot 0 + B \cdot 0 + 1 \cdot 0 = C \end{aligned}$$

となりますから

$$(f-h)(\alpha) = (f-h)(\beta) = (f-h)(\gamma) = 0$$

が従います．さらに

$$\deg(f-h) \leq 2$$

が成立しますから

$$f - h = 0$$

であることが分かります．

VIII $a, b \in \mathbf{R}$ とします．

$$f(x) = ax^4 - 2ax^3 + (a+1)x^2 - bx - b$$

において

$$f(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 0$$

とします．
(1) a, b を求めましょう．
(2) f の他の根を求めましょう．

解答 $x_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ とします．このとき

$$\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \quad \text{から} \quad x_0^2 - x_0 + 1 = 0$$

が従います．筆算

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 & & ax^2 & - & ax & + & 1-a & & & & \\ \cline{3-11}
x^2 - x + 1 &) & ax^4 & - & 2ax^3 & + & (a+1)x^2 & - & bx & - & b \\
 & & ax^4 & - & ax^3 & + & ax^2 & & & & \\ \cline{3-11}
 & & & - & ax^3 & + & x^2 & - & bx & - & b \\
 & & & - & ax^3 & + & ax^2 & - & ax & & \\ \cline{4-11}
 & & & & & & (1-a)x^2 & - & (b-a)x & - & b \\
 & & & & & & (1-a)x^2 & - & (1-a)x & + & 1-a \\ \cline{6-11}
 & & & & & & & & (1-b)x & + & a-b-1
\end{array}$$

から

$$f(x) = (ax^2 - ax + (1-a))(x^2 - x + x) + (1-b)x + a - b - 1 \tag{1}$$

と割り算できます．$x = x_0$ を代入すると

$$0 = f(x_0) = (1-b)x_0 + a - b - 1$$

を得ます．$b \neq 1$ ならば $x_0 \in \mathbf{R}$ となりますから $b = 1$ であることが分かります．さらに $a-b-1=0$ も成立しますから $a = 2$ であることが分かります．(1) は

$$f(x) = (2x^2 - 2x + 1)(x^2 - x + x)$$

となりますから，x_0 と異なる解は

$$x = \frac{1 \pm i}{2},\ \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

であることが分かります.
別解　$x_0^2 - x_0 + 1 = 0$ の両辺に $x_0 + 1$ を掛けると

$$x_0^3 + 1 = 0 \quad 従って \quad x_0^3 = -1$$

であることが分かります. これから

$$\begin{aligned} f(x_0) &= ax_0^4 - 2ax_0^3 + (a+1)x_0^2 - bx_0 - b \\ &= -ax_0 + 2a + (a+1)(x_0 - 1) - bx_0 - b \\ &= (1-b)x_0 + a - b - 1 = 0 \end{aligned}$$

が従います.

IX

$$f(x) = x^{2n} + x^n + 1$$

が $x^2 + x + 1$ で割り切れるか調べましょう.

解答

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

とおくと

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

となります. ここで $f(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割り算しておきます. すなわち

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1) + Ax + B \tag{1}$$

を満たす $A, B \in \mathbf{R}$ が存在します. ここで $x = \omega$ を代入すると

$$f(\omega) = A\omega + B \tag{2}$$

となります. そこで $f(\omega)$ を n を 3 で割った余りで場合分けして求めます.
(i) $\underline{n = 3k のとき}$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k} + \omega^{3k} + 1 = \left(\omega^3\right)^{2k} + \left(\omega^3\right)^k + 1 \\ &= 1^{2k} + 1^k + 1 = 3 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 3$$

となります. これを $A\omega + (B-3) = 0$ とすると $\omega \notin \mathbf{R}$ から $A = 0, B = 3$ となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1) + 3$$

となります.

(ii) $\underline{n = 3k+1 \text{ のとき}}$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k+2} + \omega^{3k+1} + 1 = \left(\omega^3\right)^2 k\omega^2 + \left(\omega^3\right)^k \omega + 1 \\ &= 1^{2k}\omega^2 + 1^k\omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 0$$

となります. $\omega \notin \mathbf{R}$ から $A = 0, B = 0$ となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1)$$

となります.

(iii) $\underline{n = 3k+2 \text{ のとき}}$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k+4} + \omega^{3k+2} + 1 = \left(\omega^3\right)^{2k+1} \omega + \left(\omega^3\right)^k \omega^2 + 1 \\ &= 1^{2k+1}\omega + 1^k\omega^2 + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 0$$

となります. $\omega \notin \mathbf{R}$ から $A = 0, B = 0$ となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1)$$

となります.

以上から $f(x)$ が $x^2 + x + 1$ で割り切れる必要十分条件は n が 3 で割り切れないことが示されました.

X

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

とします.

(1) $z^n - 1 = 0$ の解が $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$ であることを示しましょう.

(2)

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1}) = n$$

となることを示しましょう.

解答 $z^n = 1$ のとき $|z|^n = 1$ から $|z| = 1$ であることが分かります. 従って

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と $\theta \in \mathbf{R}$ を用いて表されます.

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad 0 \leq n\theta < 2n\pi$$

から

$$n\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2(n-1)\pi$$

すなわち

$$\theta = \frac{2k}{n}\pi \quad (k = 1, 1, 2, \ldots, n-1)$$

であることが分かります．従って解は

$$z = 1, e^{i\frac{2}{n}\pi}, e^{i\frac{4}{n}\pi}, \ldots, e^{i\frac{2(n-1)}{n}\pi}$$

は $\alpha = e^{i\frac{2}{n}\pi}$ を用いて

$$z = 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$$

と表現されます．以上で

$$z^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$$

であることが示されました．よって

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + \ldots + z + 1) = (z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)\ldots(z-\alpha^{n-1})$$

から

$$z^{n-1} + \ldots + z + 1 = (z-\alpha)(z-\alpha^2)\ldots(z-\alpha^{n-1})$$

であることが示されました．ここで $z = 1$ を両辺に代入すると

$$n = (1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n-1})$$

であることが従います.

XI 以下の多項式 $f(x)$, $g(x)$ の最大共通因子を最高次数の係数が 1 として求めまし ょう.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = 4x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 11x + 3$$

解答

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & -2 & 5 & -4 & 3 \\
 & 4 & -8 & 20 & -16 & 12 \\
+) & -4 & -5 & 5 & -9 & \\
\hline
 & & -13 & 25 & -25 & 12 \\
 & & -52 & 100 & -100 & 48 \\
 & -) & -52 & -65 & 65 & -117 \\
\hline
 & & & 165 & -165 & 165 \\
 & & & 1 & -1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & 4 & -12 & 15 & -11 & 3 \\
-) & 4 & -8 & 20 & -16 & 12 \\
\hline
 & & -4 & -5 & 5 & -9 \\
 & -) & -4 & 4 & -4 & \\
\hline
 & & & -9 & 9 & -9 \\
 & & -) & -9 & 9 & -9 \\
\hline
 & & & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

上の計算から共通因子で最高次数の係数が 1 であるものは x^2-x+1 であることが分かります．より詳しくは以下のようにして理解します．

$$\begin{aligned}
g(x)-4f(x) &= -4x^3-4x^5+5x-9 (= r_1(x) \text{としますす}) \\
4f(x)-xr_1(x) &= -13x^3+25x^2-25x+12 \\
\text{両辺を 4 倍して} & \\
16f(x)-4xr_1(x) &= -52x^3+100x^2-100x+48 \\
16f(x)-4xr_1(x)-13r_1(x) &= 16f(x)-(4x+13)r_1(x) \\
&= 165x^2-165x+165 = 165(x^2-x+1) \\
r_1(x) &= -(4x+9)(x^2-x+1)
\end{aligned}$$

XII $z^4 = 8(-1+i\sqrt{3})$ を満たす $z \in \mathbf{C}$ をすべて求めましょう．

解答

$$z^4 = 8(-1+i\sqrt{3})$$

の両辺の絶対値をとると

$$|z|^4 = 8 \cdot 2 = 16$$

となりますから $|z| = 2$ であることが分かります．$w = \frac{z}{2}$ と定めると

$$w^4 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2}{3}\pi} \tag{1}$$

が成立します．$|w| = 1$ が成立しますから

$$w = \cos\theta + i\sin\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

である $\theta \in \mathbf{R}$ が存在します．(1) から

$$e^{i4\theta} = e^{i\frac{2}{3}\pi}, \quad 0 \le 4\theta < 8\pi$$

から

$$4\theta = \frac{2\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \frac{14\pi}{3},\ \frac{20\pi}{3},$$

すなわち

$$\theta = \frac{2\pi}{12},\ \frac{8\pi}{12},\ \frac{14\pi}{12},\ \frac{20\pi}{12}$$

となります．以上で

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}},\ 2e^{i\frac{2\pi}{3}},\ 2e^{i\frac{7\pi}{6}},\ 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

であることが分かりました．