C-H の定理

Nobuyuki TOSE

January 10, 2020

第 18 講 (2019/12/20) の確認問題 III

$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbf{K}^n)^*$, $A_0, B_0 \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbf{a} \\ \hline \vec{0} & A_0 \end{array}\right)$$

と定めます．このとき $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ に対して

$$f(A) = \left(\begin{array}{c|c} f(\alpha) & * \\ \hline \vec{0} & f(A_0) \end{array}\right)$$

CH の定理 (1)

CH の定理

$A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\Phi_A(A) = O_n$$

証明

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_n), \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$$

として証明します（$\mathbf{K} = \mathbf{C}$ のとき必ず成立します）．このときある $\vec{p}_1 \in \mathbf{K}^n$ が存在して

$$A\vec{p}_1 = \alpha_1 \vec{p}_1, \quad \vec{p}_1 \neq \vec{0}$$

さらに基底の延長を用いて正則行列 $P = (\vec{p}_1 \ \cdots \ \vec{p}_n)$ を構成すると

$$B := P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{b} \\ \hline \vec{0} & B_0 \end{array}\right)$$

CH の定理 (2)

このとき

$$\Phi_B(\lambda) = \Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_n)$$

$$\Phi_B(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\Phi_{B_0}(\lambda)$$

から

$$\Phi_{B_0}(\lambda) = (\lambda - \alpha_2)\cdots(\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_n)$$

となります．ここで n に関する帰納法を用いると

$$\Phi_{B_0}(B_0) = O_{n-1}$$

と仮定できます．

CH の定理 (3)

$$\Phi_B(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\Phi_{B_0}(\lambda)$$

から

$$\Phi_B(B) = (B - \alpha_1 I_n)\Phi_{B_0}(B)$$

となります．他方「確認問題」から

$$\Phi_{B_0}(B) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi_{B_0}(\alpha_1) & * \\ \hline \vec{0} & \Phi_{B_0}(B_0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi_{B_0}(\alpha_1) & * \\ \hline \vec{0} & O_{n-1} \end{array}\right)$$

となりますから

$$\Phi_B(B) = \left(\begin{array}{c|c} o & * \\ \hline \vec{0} & B_0 - \alpha_1 I_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \Phi_{B_0}(\alpha_1) & * \\ \hline \vec{0} & O_{n-1} \end{array}\right) = O_n$$

となります．

CH の定理 (4)

さらに

$$O_n = \Phi_B(B) = \Phi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\Phi_A(A)P$$

から

$$\Phi_A(A) = O_n \tag{1}$$

となります.