定理 $A : 3\times 3$

$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$

$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$

$\Rightarrow \exists P$ 正則 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$

I $A(\vec{p}\ \vec{q}) = (A\vec{p}\ \ A\vec{q})$

$A(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) = (A\vec{p}\ \ A\vec{q}\ \ A\vec{r})$

$\vdots$

II $(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{p} + y\vec{q}$

$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{r}$

$\vdots$

$(a_1\ a_2 \cdots a_n)\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = {}^t\vec{a}\,\vec{e}$

$\parallel$

$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n = (\vec{a}, \vec{e})$

$$\boxed{{}^t\vec{a}\,\vec{e} = (\vec{a}, \vec{e})}$$

2019 年 12 月 09 日小テスト解答

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ を対角化しましょう．

解答　$|\lambda I_3 - A|$

$\lambda = 1$ を代入

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$\lambda = 1$ のとき 0

余因子展開

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-7)$$

$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$.

から A の固有値は $\lambda = 1$(重根), 7 であることが分かります．

$\lambda = 7$ を代入

　次に固有ベクトルを求めます．

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

固有値 1 の固有空間

(i) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y - 2z = 0$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V(1)$

$\Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V(1)$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

となります．

$V(1) = \left\{ c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p_1}$ と $\vec{p_2}$ は平行でありませんから，$V(1)$ の基底であることが分かります．

$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} * \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$

$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ は線型独立

一次独立

(ii) $\underline{\lambda = 7 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}z, \quad y = \frac{1}{2}z$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ;\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$ 固有値1の固有空間

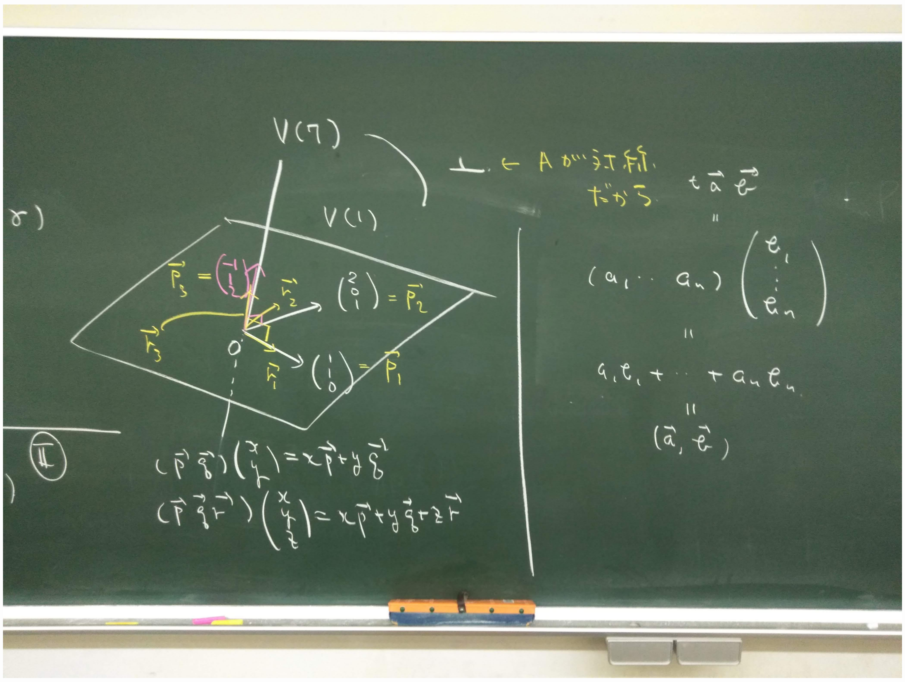
• $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V(1) \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V(1)$

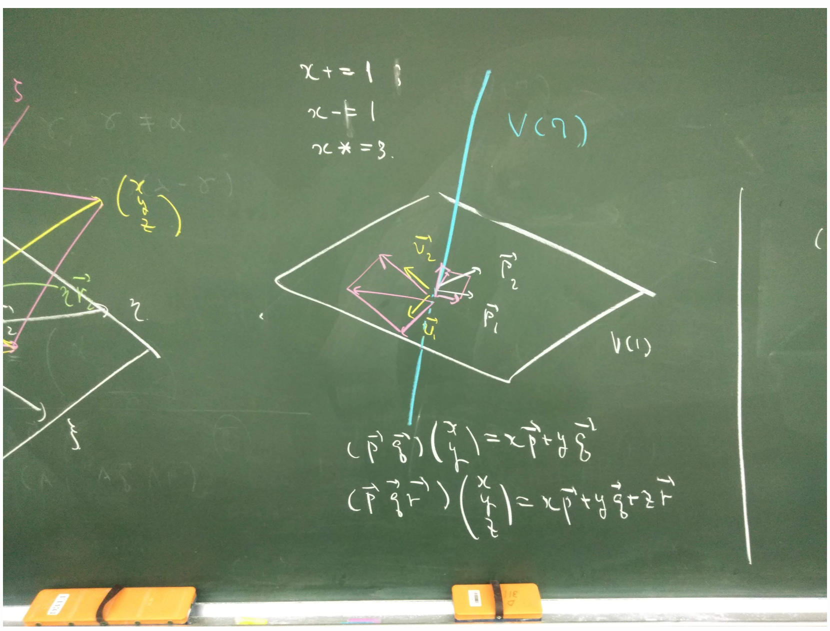
+とスカラー倍について閉じている.

V(1)は部分空間.

$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \forall \vec{v} \in V(1) \quad \vec{v} = c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2 \text{ と書ける (V(1)は } \vec{p}_1, \vec{p}_2 \text{ で生成される)} \\ \bullet\ c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2 \text{ は線型独立}) \end{array} \right.$

$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ は V(1)の基底.





$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ 3×3 が正則 $\Longleftrightarrow$ $(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0)$

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は線形独立 LI

$\Updownarrow$

$|P| \neq 0$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

となります．ここで $\vec{p}_3 = (-1\ 1\ 2)$ と定めると $\vec{p}_3$ は $V(7)$ の基底となります．一般論から $V(1) + V(7)$ は直和となりますから

$$\vec{v}_1 \in V(1), \vec{v}_2 \in V(7), \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} = \cancel{-2}\ -6 \neq 0$

が成立します．従って

$$\underbrace{\boxed{c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2}}_{V(1)} + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

$\in V(7)$

を仮定すると $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 \in V(1)$, $c_3\vec{p}_3 \in V(7)$ から

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

$\alpha \neq \beta$

$\vec{p} \in V(\alpha)$, $\vec{q} \in V(\beta)$

$\vec{p} + \vec{q} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = \vec{q} = \vec{0}$

であることが分かります．$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$, $\vec{p}_3 \neq \vec{0}$ から

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

従って $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ が正則であることが分かります．

ここで

$$\begin{aligned}AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3)\\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ 7\vec{p}_3)\\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 7\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\vec{p} \neq \vec{0}$, $c\vec{p} = \vec{0} \Rightarrow c = 0$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 7\end{pmatrix}$$

補足まず $V(1)$ の基底

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 2 \neq 0$

を正規直交化します．まず $\vec{p}_1$ を正規化して

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{||\vec{p}_1||}\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

と定めます．さらに $\vec{p}_2$ の $\vec{p}_1$ 方向への直交射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{p}_2, \vec{p}_1)}{||\vec{p}_1||^2}\vec{p}_1 = \frac{2}{2}\vec{p}_1 = \vec{p}_1$$

$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in V(1)$

$\vec{r}_1 \perp \vec{r}_2$

$||\vec{r}_1|| = ||\vec{r}_2|| = 1$

となりますから，$\vec{r}_1$ に垂直なベクトルである $\vec{p}_2 - \vec{w}$ は

$$\vec{p}_2 - \vec{w} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

と求められます．これを正規化して

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{||\vec{p}_2 - \vec{p}_2||}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

と定めると

$$||\vec{r}_1|| = ||\vec{r}_2|| = 1, \quad (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

が分かります．これが $V(1)$ の正規直交基底となります．

次に $V(7)$ の正規直交基底を求めます．$||\vec{r}_3|| = 1$ となるように

$$\vec{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると，一般論から $V(1) \perp V(7)$ であることが分かりますから

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_3) = (\vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$$

が従います．よって $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2 \ A\vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ 7\vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

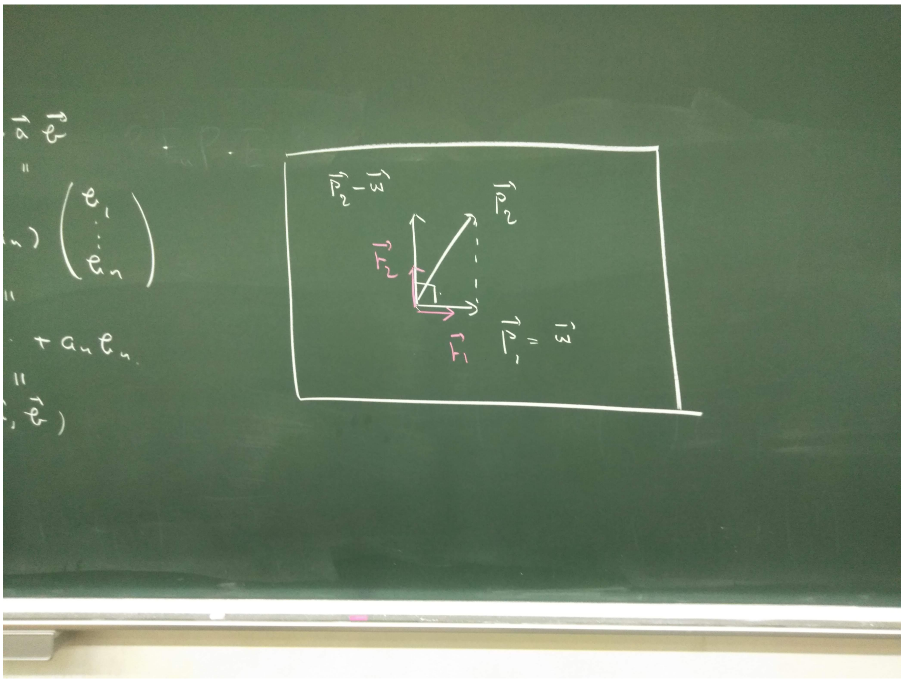
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

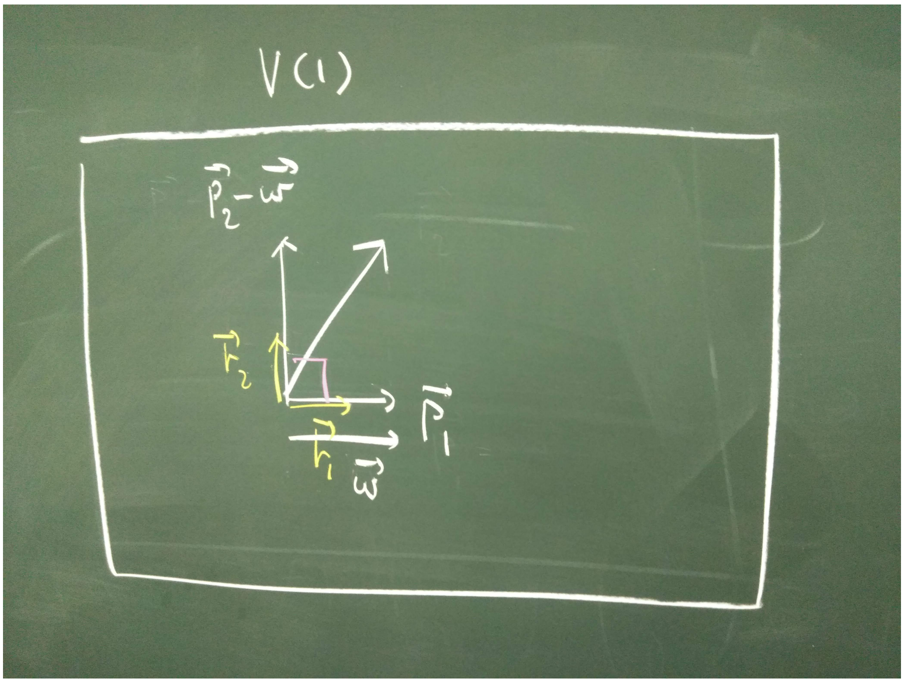
によって A が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= \left({}^tRA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tR \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \left({}^tRAR \cdot {}^tR \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tR \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right) = \xi^2 + \eta^2 + 7\eta^2 \end{aligned}$$

ζ^2

と変換されます．




V(1)

定理1 $A \in M_3(\mathbb{R})$ が ${}^tA = A$ を満たすとき

1) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

2) $\exists R \in O(3)$

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

$A : 3\times 3,\ {}^tA = A$ のとき.

定理2 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が $\alpha \neq \beta$ であるとき

$V(\alpha) \perp V(\beta)$ $= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ;\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$

注 $\Phi_A(\beta) \neq 0$ ならば $V(\beta) = \{\vec{0}\}$

β

(定理2の証明) $\vec{p} \in V(\alpha)$, $\vec{q} \in V(\beta)$ とする.

$$\boxed{(A\vec{p}, \vec{q})} = (\alpha\vec{p}, \vec{q}) = \alpha(\vec{p}, \vec{q})$$

$$\parallel$$

$$(\vec{p}, {}^tA\vec{q}) = (\vec{p}, A\vec{q}) = \beta(\vec{p}, \vec{q})$$

$= (\vec{p}, \beta\vec{q})$

${}^tA = A$

から

$$\underbrace{(\alpha - \beta)}_{\neq 0}(\vec{p}, \vec{q}) = 0$$

が分かる. $\longrightarrow (\vec{p}, \vec{q}) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

解答

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 0 & 5-\lambda \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-5)$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 4, 5$ であることが分かります. → 対角化可能

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\lambda = 1$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow x - z = 0, \quad y - 2z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

$z = \frac{1}{\sqrt{6}}$ にあたるのが $\vec{r_1}$

となります．特に $||\vec{r}_1|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

V(1)は部分空間
+とスカラー倍で
閉じている.

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A\vec{r_1} = \vec{r_1}$

とします.

(ii) $\lambda = 4$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - z = 0, \quad y + z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．特に $||\vec{r}_2|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

$\lambda = 1 \quad \vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$\lambda = 4 \quad \vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=5$ のとき

$A = \begin{pmatrix}4&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&4\end{pmatrix}$

$\vec{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow {}^tA = A$

$\|\vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = \|\vec{r}_3\| = 1, \quad (\vec{r}_1,\vec{r}_2)=0, \quad (\vec{r}_2,\vec{r}_3)=0, \quad (\vec{r}_3,\vec{r}_1)=0$

Aが対称だから.

(iii) $\lambda = 5$ のとき

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\1&-3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow x+z=0, \quad y=0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．特に $\|\vec{r}_3\| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

とします．

補足一般論から

$$V(\overset{1}{\cancel{0}}) \perp V(\overset{4}{\cancel{3}}), \quad V(\overset{1}{\cancel{0}}) \perp V(\overset{5}{\cancel{4}}), \quad V(\overset{4}{\cancel{3}}) \perp V(\overset{5}{\cancel{4}})$$

であることが分かりますから

$$(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

が従います．さらに

$$\|\vec{r}_j\| = 1 \quad (j = 1,2,3)$$

と $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ を選んでいます．よって $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2\ A\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\ 4\vec{r}_2\ 5\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&5\end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

${}^tRAR$

$\| $

$R^{-1}AR = \begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

によって A が定める 2 次形式は

${}^tR$が直交

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \left({}^tRA\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \left({}^tRA\boxed{R\cdot{}^tR}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$$

$= I_3$

$$= \left(\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\right) = \xi^2 + 4\eta^2 + 5\eta^2$$

と変換されます．

$A = \begin{pmatrix}4&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&4\end{pmatrix}$

$= 4x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

直交座標変換

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix} = \xi\vec{r}_1 + \eta\vec{r}_2 + \zeta\vec{r}_3$

$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix} = R^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$$

$$\boxed{\begin{gathered} \|\vec{r}_1\|^2 = \|\vec{r}_2\|^2 = \|\vec{r}_3\| = 1 \\ (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (\vec{r}_2, \vec{r}_3) = (\vec{r}_3, \vec{r}_1) = 0 \end{gathered}}$$

$$ {}^tRR = \begin{pmatrix} {}^t\vec{r}_1 \\ {}^t\vec{r}_2 \\ {}^t\vec{r}_3 \end{pmatrix} (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$$

$$= \begin{pmatrix} \|\vec{r}_1\|^2 & (\vec{r}_1, \vec{r}_2) & (\vec{r}_1, \vec{r}_3) \\ (\vec{r}_2, \vec{r}_1) & \|\vec{r}_2\|^2 & (\vec{r}_2, \vec{r}_3) \\ (\vec{r}_3, \vec{r}_1) & (\vec{r}_3, \vec{r}_2) & \|\vec{r}_3\|^2 \end{pmatrix}$$

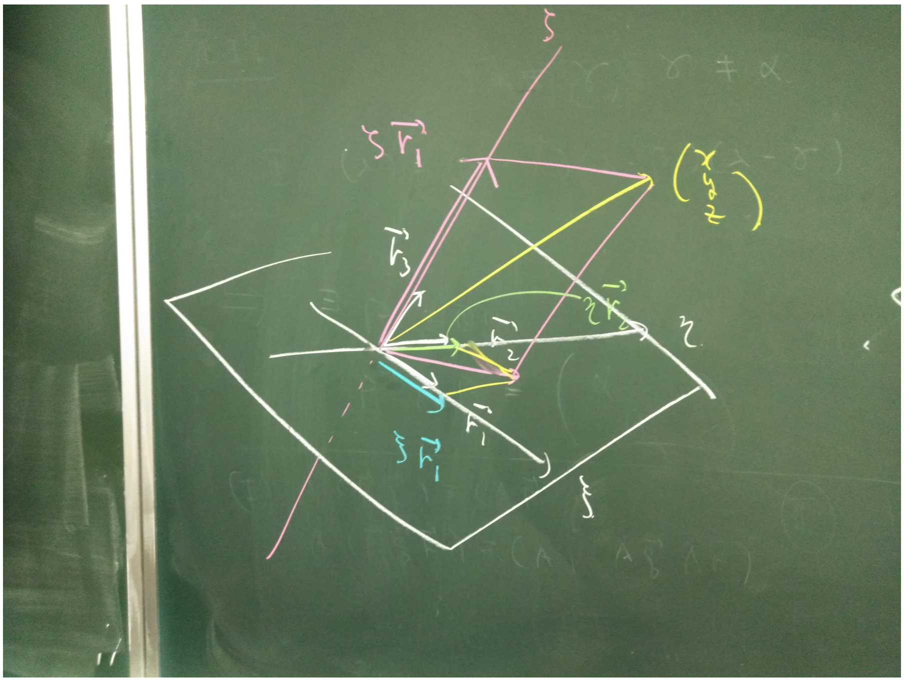
$$\Longleftrightarrow {}^tRR = I_3$$

$$\Longleftrightarrow (R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3)$$

$$\begin{gathered} \shortparallel \\ (\vec{v}, \underbrace{{}^tRR}_{= I_3}\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \end{gathered} \qquad \Downarrow$$

- $${}^tRR = I_3 \rightsquigarrow |{}^tRR| = |I_3| = 1 \qquad |{}^tA| = |A|$$
  $$\shortparallel$$
  $$|{}^tR| \cdot |R| = |R|^2$$
  $$\rightsquigarrow |R| = \pm 1 \to R \text{ は正則} \qquad {}^tRR = I_3$$
  $$\downarrow \cdot R^{-1}$$
  $$\boxed{{}^tR = R^{-1}} \qquad \underbrace{{}^tRRR^{-1}}_{= {}^tR} = I_3R^{-1} = R^{-1}$$

- R 直交 $\Rightarrow$ ${}^tR\ (= R^{-1})$ も直交
  $${}^t({}^tR)\,{}^tR = R\,R^{-1} = I_3$$


ζ
ζ r⃗₁
(x y z)
r⃗₃
η r⃗₂
r⃗₂
η
ξ r⃗₁
r⃗₁
ξ

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ を直交行列で対角化.

$$\begin{vmatrix} \lambda-6 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$