株	A_1	$\cdots$ A_j	$\cdots$	A_n
投資金額	x_1	$\cdots$ x_j	$\cdots$	x_n
収益率	r_1	$\cdots$ r_j	$\cdots$	r_n
第1期	r_{11}	$\cdots$ r_{1j}	$\cdots$	r_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
第i期	r_{i1}	$\cdots$ r_{ij}	$\cdots$	r_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
第N期	r_{N1}	$\cdots$ r_{Nj}	$\cdots$	r_{Nn}

ポートフォリオ

$$1 = x_1 + \cdots + x_n$$

$$R = x_1 r_1 + \cdots + x_n r_n$$

$$R_1 = x_1 r_{11} + \cdots + x_n r_{1n}$$

$$\vdots$$

$$R_i = x_1 r_{i1} + \cdots + x_n r_{in}$$

$$\vdots$$

$$R_N = x_1 r_{N1} + \cdots + x_n r_{Nn}$$

ポートフォリオの収益率は $R = x_1 r_1 + \cdots + x_n r_n$.

$$\overline{R} = x_1 \overline{r_1} + \cdots + x_n \overline{r_n}$$

$V(R)$ を求める. $\vec{r_j} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} r_{1j} - \overline{r_j} \\ \vdots \\ r_{Nj} - \overline{r_j} \end{pmatrix}$ とすると

$$\vec{R} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} R_1 - \overline{R} \\ \vdots \\ R_N - \overline{R} \end{pmatrix} = x_1 \vec{r_1} + \cdots + x_n \vec{r_n}$$

$$V(R) = \|\vec{R}\|^2 = \left((\vec{r_1} \cdots \vec{r_n}) \vec{x},\ (\vec{r_1} \cdots \vec{r_n}) \vec{x} \right)$$

$$= \left({}^t(\vec{r_1} \cdots \vec{r_n})(\vec{r_1} \cdots \vec{r_n}) \vec{x}, \vec{x} \right)$$

$V = (c_{ij})$ で $c_{ij} = (\vec{r_i}, \vec{r_j}) = \begin{cases} V(\vec{r_i}) & i = j \\ c_{r_i r_j} & i \neq j \end{cases}$

と分散行列を定めると

$$V(R) = (V\vec{x}, \vec{x})$$

問題　条件 $g_1(x) = 1 - x_1 - \cdots - x_n = 0$

$g_2(x) = \mu - \mu_1 x_1 - \cdots - \mu_n x_n = 0$

の下で $f(x) = \frac{1}{2} V(R)$ を最小化すること。

（リターンのレベルが一定 μ の下でリスク $V(R)$ を最小化）

条件　① $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$, $\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると $\vec{\mu} \nparallel \vec{1}$

② $(V\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$

---

②について　(i) 一般に A が $m \times n$ のとき

$${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA.$$

から ${}^tAA$ は対称行列。（A のグラム行列と呼ぶ）

(ii)

$$(({}^tAA)\vec{x}, \vec{x}) = (A\vec{x}, A\vec{x}) = \|A\vec{x}\|^2 \geq 0$$

である。$({}^tAA\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$ であるためには

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

すなわち「$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ が線型独立である」ことが必要十分である。よって条件②は

② $\Longleftrightarrow$ $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ が線型独立である

を満たす。

いくつか②について補足を必要とするが、そのときになったら解説しよう。

一般に n次対称行列 A に対し

$$f(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$$

とすると

$$\nabla(f) = 2A\vec{x}$$

$$H(f) = 2A$$

に注意する.

この注意を用いて Lagrange の未定乗数法を適用すると
$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ で極大(小)ならば

$$\begin{cases} \nabla(f) + \lambda_1 \nabla(g_1) + \lambda_2 \nabla(g_2) = \vec{0} & \cdots (3) \\ (\vec{1}, \vec{x}) = 1 & \cdots (4) \\ (\vec{\mu}, \vec{x}) = \mu & \cdots (5) \end{cases}$$

を満たす $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ が存在する これは

$$\begin{cases} V\vec{x} - \lambda_1 \vec{1} - \lambda_2 \vec{\mu} = \vec{0} & (3)' \\ (\vec{1}, \vec{x}) = 1 & (4) \\ (\vec{\mu}, \vec{x}) = \mu & (5) \end{cases}$$

となる.

<u>注意.</u> ① から (4), (5) を満たす $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ は $(n-2)$ 次元分ある.

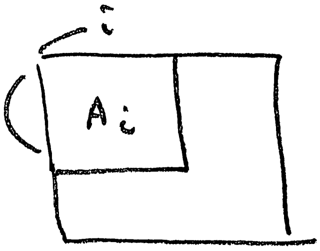
注意 一般に n 次対称行列 A に対して

$$(A\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

$$\iff A \text{の固有値 } \alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$$

$$\iff |A_1| = a_{11} > 0,\ |A_2| > 0,\ \cdots,\ |A_n| = |A| > 0$$

A_i を A の主座小行列 i と呼ぶ



② から V は正則である

- ② から $|V| > 0$ が分かる.
- V が正則でないとすると $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ に対して $V\vec{x} = \vec{0}$ となる(注)

$$(V\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{0}, \vec{x}) = 0$$

となり矛盾が生じる(②に反する)

---

(3)′ から

$$V\vec{x} = (\vec{1}\ \vec{\mu})\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix}$$

となるが V は正則なので

$$\vec{x} = V^{-1}(\vec{1}\ \vec{\mu})\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix}$$

となる. さらに (4), (5) を用いて λ_1, λ_2 を求めよう.

(注) A: n 次正方行列に対して A: 正則 $\iff (A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$

$\iff |A| \neq 0$

以下 $F=(\vec{1}\ \vec{\mu})$ とおく　このとき

$$\vec{x}=V^{-1}F\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

$${}^t\vec{1}\,\vec{x}=(\vec{1},\vec{x})=1$$

$${}^t\vec{\mu}\,\vec{x}=(\vec{\mu},\vec{x})=\mu$$

なので

$$\begin{pmatrix}{}^t\vec{1}\\ {}^t\vec{x}\end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\ \mu\end{pmatrix} \quad 従って \quad {}^tF\,\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\ \mu\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\ \mu\end{pmatrix}={}^tF\,\vec{x}\underset{(6)}{\overset{\uparrow}{=}}{}^tF\,V^{-1}F\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}$$

となるが

$${}^tF\,V^{-1}F=\begin{pmatrix}{}^t\vec{1}\\ {}^t\vec{\mu}\end{pmatrix}V^{-1}(\vec{1}\ \vec{\mu})=\begin{pmatrix}{}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{\mu}\\ {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{\mu}\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}{}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{\mu}\\ {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{\mu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \mu\end{pmatrix}$$

が解ければよい

注）一般に A が正則で対称とすると A^{-1} も対称である。

$$AX=I_n$$

の転置をとると

$$I_n={}^tX\,{}^tA={}^tX\,A$$

から

$$A^{-1}={}^tX={}^t(A^{-1})$$

V^{-1}は対称であるが,

$${}^t({}^tF V^{-1} F) = {}^tF\,{}^tV^{-1}\,{}^t({}^tF)$$
$$= {}^tF V^{-1} F$$

から ${}^tFV^{-1}F$ も対称である. 具体的には

$${}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{\mu} = {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{1}$$

を示すのに少し面倒なことをしたが この

$$(左) = (\vec{1}, V^{-1}\vec{\mu}) = ({}^t(V^{-1})\vec{1}, \vec{\mu})$$
$$= (V^{-1}\vec{1}, \vec{\mu}) = (\vec{\mu}, V^{-1}\vec{1})$$

としてもよい.

さらに 対称な ${}^tFV^{-1}F$ の定める2次形式が正定値であることを示す. そのためには まず V^{-1} が定める2次形式が正定値であることを示す.

簡単に示すと $\vec{x}\neq\vec{0}$ であるとき $V^{-1}\vec{x}=\vec{y}$ とおくと $\vec{x}=V\vec{y}$ で $\vec{y}\neq\vec{0}$ となるので

$$(V^{-1}\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{y}, V\vec{y}) = (V\vec{y}, \vec{y}) > 0$$

から分かる(この内容はいろいろと補足が必要となるが 後述としよう)

条件①から $\vec{1}\nparallel\vec{\mu}$ なので

$$F\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = (\vec{1}\ \vec{\mu})\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \vec{0}$$

従って $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ ならば $F\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$

$\vec{c} \neq \vec{0}$ とすると $F\vec{c} \neq \vec{0}$ なので

$$({}^tFV^{-1}F\vec{c}, \vec{c}) = (V^{-1}F\vec{c}, F\vec{c}) > 0$$

この必要十分条件は ${}^tFV^{-1}F = \begin{pmatrix} C & A \\ A & B \end{pmatrix}$ とすると

$$C > 0, \quad \begin{vmatrix} C & A \\ A & B \end{vmatrix} > 0$$

である。以上から

$$({}^t\vec{1}, V^{-1}\vec{1}) > 0, \quad \begin{vmatrix} {}^t\vec{1}V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{1}V^{-1}\vec{\mu} \\ {}^t\vec{\mu}V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{\mu}V^{-1}\vec{\mu} \end{vmatrix} > 0$$

が示された。

$$\begin{pmatrix} C & A \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

を解くと $\Delta = CB - A^2 > 0$ として

$$\lambda_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & A \\ \mu & B \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(B - \mu A)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C & 1 \\ A & \mu \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(C\mu - A)$$

従って

$$\vec{x} = \frac{B - A\mu}{\Delta}V^{-1}\vec{1} + \frac{C\mu - A}{\Delta}V^{-1}\vec{\mu}$$

であることが分かる。実際

$$\vec{x} = V^{-1}F\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = V^{-1}(\vec{1}\ \vec{\mu})\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= V^{-1}(\lambda_1\vec{1} + \lambda_2\vec{\mu})$$

$$= \lambda_1 V^{-1}\vec{1} + \lambda_2 V^{-1}\vec{\mu}$$

注　実は②から $V(R)$ は この $\vec{x}$ で 制約条件の下で 最小値をとる
ことが分かる。

このとき、

$$\sigma^2 := V(R) = (V\vec{x}, \vec{x})$$

$$= \left(F\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}, V^{-1}F\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}, {}^tF V^{-1} F\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ \mu\end{pmatrix}\right) = \lambda_1 + \lambda_2\mu$$

$$= \frac{B - A\mu}{D} + \mu\,\frac{C\mu - A}{D}$$

$$= \frac{C}{D}\left(\mu - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C}$$

すなわち

$$\frac{\sigma^2}{\frac{1}{C}} - \frac{\left(\mu - \frac{A}{C}\right)}{\frac{D}{C^2}} = 1$$

(ここで D, $C > 0$ に注意しよう)