補足 (3変数と1制約条件)

$$F(x,y) = f(x, y, \varphi(x,y))$$

に対して

$$F_x(a,b) = F_y(a,b) = 0$$

から

$$f_x(a,b,c)\cdot 1 + f_y(a,b,c)\cdot 0 + f_z(a,b,c)\,\varphi_x(a,b) = 0$$

$$f_x(a,b,c)\cdot 0 + f_y(a,b,c)\cdot 1 + f_z(a,b,c)\,\varphi_y(a,b) = 0$$

となります.

$$\left(\nabla(f)(P_0),\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_x(a,b) \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\nabla(f)(P_0),\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_y(a,b) \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad (2)$$

となります. 同様に

$$\left(\nabla(g)(P_0),\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_x(a,b) \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad (3)$$

$$\left(\nabla(g)(P_0),\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_y(a,b) \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad (4)$$

となります.

$$N = \mathbb{R}\,\nabla(g)(P_0) \quad (\subset \mathbb{R}^3)$$

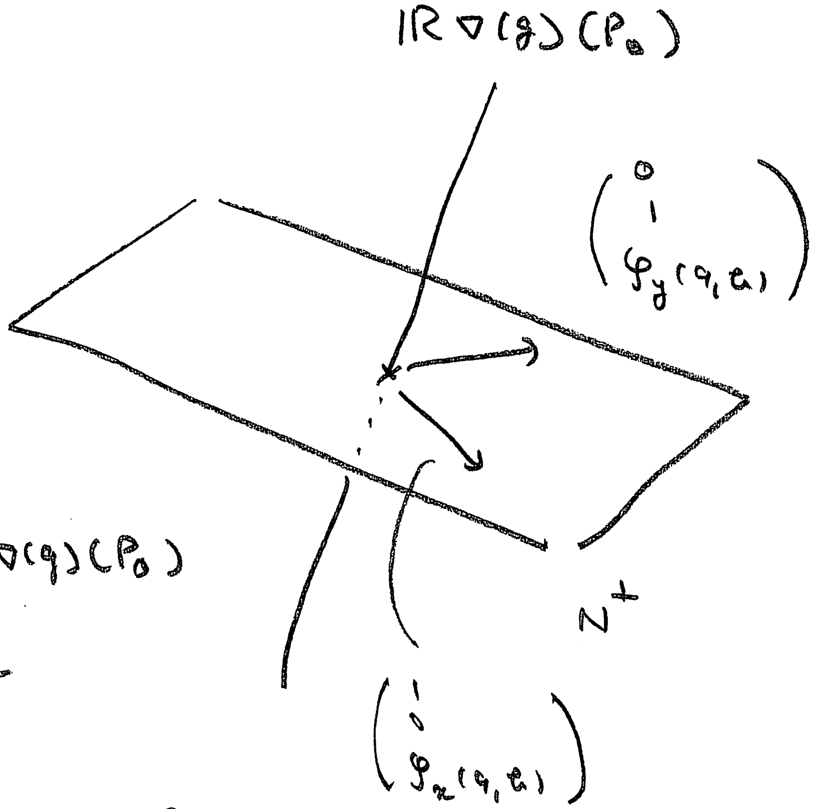
に対して $N^{\perp}$ の次元が 2 で $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_x(a,b) \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_y(a,b) \end{pmatrix}$

から

$$N^{\perp} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_x(a,b) \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_y(a,b) \end{pmatrix}$$

であることが分かります.

(1), (2) から



$$
\begin{aligned}
\nabla(f)(P_0) &\in (N^{\perp})^{\perp} = N \\
&= \mathbb{R}\nabla(g)(P_0)
\end{aligned}
$$

から $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$\nabla(f)(P_0) = -\lambda \nabla(g)(P_0)$$

となります.