

2019 年 11 月 26 日「経済数学」演習問題

$\mathbf{I} \ P \in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^n) \quad (1)$$

と

$$\|P\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^n) \quad (2)$$

が必要十分であることを証明しましょう。

解答 (1) $\Rightarrow$ (2)

(1) において $\vec{w} = \vec{v}$ の場合を考えると

$$\|P\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$$

となりますから, (2) が従います.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{4} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2)$$

が成立することを用います. 実際

$$\begin{aligned} (P\vec{v}, P\vec{w}) &= \frac{1}{4} (\|P\vec{v} + P\vec{w}\|^2 - \|P\vec{v} - P\vec{w}\|^2) = \frac{1}{4} (\|P(\vec{v} + \vec{w})\|^2 - \|P(\vec{v} - \vec{w})\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2) = (\vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

と (2) から (1) を導くことができます.

II 3 次の直交行列の全体を $O(3)$ とします. $P_1, P_2 \in O(3)$ ならば $P_1 P_2 \in O(3)$, ${}^t P_1 \in O(3)$ であることを示しましょう

解答

$$\begin{aligned} {}^t(P_1 P_2) P_1 P_2 &= {}^t P_2 {}^t P_1 P_1 P_2 = {}^t P_2 I_3 P_2 = {}^t P_2 P_2 = I_3 \\ P_1 P_2 (P_1 P_2) &= P_1 P_2 {}^t P_2 {}^t P_1 = P_1 I_3 {}^t P_1 = P_1 {}^t P_1 = I_3 \end{aligned}$$

から $P_1 P_2$ が直交行列であることが分かります. 他方

$$\begin{aligned} {}^t({}^t P_1) {}^t P_1 &= P_1 {}^t P_1 = I_3 \\ {}^t P_1 {}^t({}^t P_1) &= {}^t P_1 P_1 = I_3 \end{aligned}$$

から ${}^t P_1$ が直交行列であることが分かります.

III $A \in M_3(\mathbf{R})$ は対称とします。 A が定める 2 次形式は正定値、すなわち

$$(A\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

が成立するとします。

(1) A が正則であることを示しましょう。

(2) A^{-1} が対称であることを示しましょう。

(3) A^{-1} が定める 2 次形式が正定値であること、すなわち

$$(A^{-1}\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

であることを示しましょう。

解答 (1) (解 1)

$$A \in M_n(\mathbf{K}) \text{ に対して (i) } A \text{ は正則} \Leftrightarrow \text{(ii) } (A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}) \Leftrightarrow \text{(iii) } \det(A) \neq 0$$

が成立することを用います。 A が正則でないとするときある $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ が

$$A\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

が成立しますが,

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

となりますが, これは A が定める 2 次形式が正定値であることに反します。 よって A は正則であることが分かります。

(解 2)

対称な $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned} \text{(i)} (A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0}) &\Leftrightarrow \text{(ii)} A \text{ の固有値 } \alpha, \beta, \gamma > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{(iii)} a_{11} > 0, \det(A_2) > 0, \det(A) > 0 \end{aligned}$$

が成立します。ただし $A = \begin{pmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{pmatrix}$ に対して $A_2 = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}$ と定めています。

これを用いると $\det(A) > 0$ から A が正則であることが分かります。

(2)

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$$

の各辺の転置行列を考えると

$${}^t(A^{-1}) {}^tA = {}^tA {}^t(A^{-1}) = I_3$$

が成立します。 A が対称ですから

$${}^t(A^{-1}) A = A {}^t(A^{-1}) = I_3$$

となりますが, 逆行列の一意性から

$$A^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

が導かれます．従って A^{-1} が対称であることが分かります．

(3) (解 1) 任意の $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ が $\vec{x} \neq \vec{0}$ を満たすとしします．このとき $\vec{y} = A^{-1}\vec{x}$ に対して $\vec{y} \neq \vec{0}$ が成立します．ここで

$$(A^{-1}\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{y}, A\vec{y}) > 0$$

となりますから A^{-1} が正定値な 2 次形式を定めることが分かります．

(解 2) A を直交行列で

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

と対角化します．このとき両辺の逆行列は

$${}^tPA^{-1}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & & \\ & \frac{1}{\beta} & \\ & & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

となります．これから A^{-1} の固有値は

$$\Phi_{A^{-1}}(\lambda) = \Phi_{{}^tPA^{-1}P}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\alpha} & & \\ & \lambda - \frac{1}{\beta} & \\ & & \lambda - \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\lambda - \frac{1}{\beta}\right) \left(\lambda - \frac{1}{\gamma}\right)$$

から $A = \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma} > 0$ となります．このことから A^{-1} が定める 2 次形式が正定値であることが従います．

IV $A \in M_{m,3}(\mathbf{R})$ とします．すなわち A が $m \times 3$ 型の行列とします． $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$ と列ベクトル表示をします．また $B = {}^tAA$ と定めます．

(1) B が非負定値であること、すなわち

$$(B\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^3)$$

が成立することを示しましょう．

(2) B が正定値であることと $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立であることが必要十分であることを示しましょう．

解答 (1)

$$(B\vec{v}, \vec{v}) = ({}^tA\vec{v}, \vec{v}) = (A\vec{v}, A\vec{v}) = \|A\vec{v}\|^2 \geq 0 \quad (28)$$

から B が定める 2 次形式が非負定値であることが分かります．

(2) B が定める 2 次形式が正定値であるとしします．

このとき (28) において $\vec{v} \neq \vec{0}$ ならば $\|A\vec{v}\|^2 \neq 0$ 従って

$$A\vec{v} \neq \vec{0} \quad \text{すなわち} \quad v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c} \neq \vec{0}$$

が分かります．これは対偶をとると

$$v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c} = \vec{0} \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

となりますから $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立であることを意味します．

逆に $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立であると仮定します．これは

$$\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow A\vec{v} \neq \vec{0}$$

と必要十分です．これから

$$\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow 0 < \|A\vec{v}\|^2 = (B\vec{v}, \vec{v})$$

が従います．

$\forall B \in M_3(\mathbf{R})$ は対称とします。

(1) B が非負定値であることと B の固有値 α, β, γ が

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

であることが必要十分であることを示しましょう。

(2) B が非負定値であるとき B が正定値であることと $\det(B) > 0$ が必要十分であることを示しましょう。

解答 (1) B が非負定値の 2 次形式を定めるとします. B (2) B が定める 2 次形式が正定値であると仮定します. を直交行列 P で

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \quad (29)$$

と対角化します. このとき

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, \quad A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

となりますが

$$0 \leq (B\vec{p}_1, \vec{p}_1) = (\alpha\vec{p}_1, \vec{p}_1) = \alpha \cdot \|\vec{p}_1\|^2 = \alpha$$

から $\alpha \geq 0$ が分かります. 同様に $\beta, \gamma \geq 0$ も分かります.

逆に, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ とします. 上で考えた B の直交行列による対角化を用います. すなわち P が定める直交座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ を用いると

$$\left(B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 \geq 0$$

となりますから, B が定める 2 次形式は非負定値であることが分かります.

このとき, B の固有値は $\alpha, \beta, \gamma > 0$ となります. このとき (29) の行列式を考えると

$$\det(B) = \det({}^t P B P) = \alpha\beta\gamma > 0$$

となります.

逆に $\det(B) > 0$ と仮定します. このとき

$$\alpha\beta\gamma = \det(B) > 0$$

から

$$\alpha, \beta, \gamma \neq 0$$

が分かります. B が非負定値の 2 次形式を定めることを前提としていますから,

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

が成立しています. 以上を合わせて

$$\alpha, \beta, \gamma > 0$$

が従います.

VI 2 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ に対して, 以下の条件 (i), (ii), (iii) が必要十分であることを示します.

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \geq 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \right) \quad (\text{i})$$

$$A \text{ の固有値 } \alpha, \beta \text{ が } \alpha, \beta \geq 0 \text{ を満たす.} \quad (\text{ii})$$

$$a, b \geq 0, |A| \geq 0 \quad (\text{iii})$$

(1) A が回転行列を用いて対角化できることを用いて (i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示しましょう.

(2) (i) を仮定すると $a, b \geq 0$ が導かれることを示しましょう.

(3) (ii) が成立すると $|A| \geq 0$ が成立することを示しましょう.

(4)

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) = \lambda^2 - (a + b)\lambda + |A|$$

から従う

$$\alpha + \beta = a + b, \quad \alpha\beta = |A|$$

を用いて (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) を示しましょう. ここで $p, q \in \mathbf{R}$ に対して

$$p, q \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p + q \geq 0, \quad pq \geq 0$$

であることを用います.

解答 (1) 回転行列 R が存在して

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角化できますが, これから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ と回転座標変換を用いると

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

となります.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$ と列ベクトルを定めます. このとき

$$A\vec{r}_1 = \alpha\vec{r}_1, \quad A\vec{r}_2 = \alpha\vec{r}_2$$

となります. これを用いると

$$0 \leq (A\vec{r}_1, \vec{r}_1) = (\alpha\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha$$

$$0 \leq (A\vec{r}_2, \vec{r}_2) = (\beta\vec{r}_2, \vec{r}_2) = \beta(\vec{r}_2, \vec{r}_2) = \beta$$

から $\alpha, \beta \geq 0$ が分かります.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\alpha, \beta \geq 0$ のとき

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \geq 0$$

となります.

(2)

$$0 \leq \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = a, \quad 0 \leq \left(A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = b$$

(3) $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + b)\lambda + |A| = 0$ の解と係数の関係から $\alpha + \beta = a + b, \alpha\beta = |A|$ が従う. $\alpha, \beta \geq 0$ のとき

$$|A| = \alpha\beta \geq 0$$

が成立する.

(4) (ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$a + b = \alpha + \beta \geq 0, \quad ab \geq ab - c^2 = |A| = \alpha\beta \geq 0$$

から $a, b \geq 0$ と $|A| \geq 0$ が従います.

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

$$\alpha + \beta = a + b \geq 0, \quad \alpha\beta = |A| \geq 0$$

から $\alpha, \beta \geq 0$ が従います.