効用最大化について

calcNT 2019W
L13, 01/08

効用関数

$$u:\ \mathbb{R}^2_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$$

が

$$(\#)\quad \det(H(u))(P) > 0,\quad u_{xx}(P) < 0 \quad (P \in \mathbb{R}^2_{++})$$

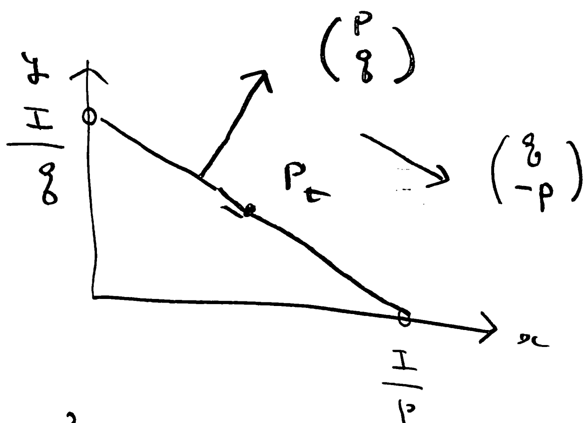
を満たすとする. $I, p, q > 0$ として

$$g(x,y) = I - px - qy = 0$$

の下で u を最大化することを考える.

$$P_t\left(qt,\ \frac{I}{q} - pt\right)$$

を $0 < t < \frac{I}{pq}$ の範囲で動かせば



$$g(P_t) = 0$$

で制約条件を満たす $(x, y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ が表現できる.

未定乗数法により 極大ならば $P(x,y)$ で

$$\begin{cases} \nabla(u)(P) - \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \vec{0} \\ g(P) = 0 \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する. P_{t_0} でこの条件が成立すると仮定する. このとき

$$U(t) = u(P_t)$$

とすると

$$U'(t) = q \cdot u_x(P_t) + (-p)\, u_y(P_t) = \left(\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}, \nabla(u)(P_t) \right)$$

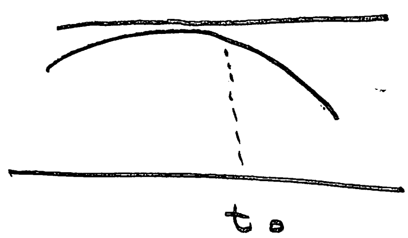
となるが

$$U'(t_0) = \left(\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}, \nabla \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) = 0$$

となる.

$$U''(t) = \left(H(u)\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}\right) < 0$$

が $0 < t < \frac{I}{pq}$ で常に成立するので



$$U(t) < U(t_0)$$

となる.

注 1) $u(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ が $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$ を満たすき.(#) を満たすことを示せ.

2) $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$ のとき (#) が成立しないことを示せ.