I　$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ 上の点 $(0,1)$ の周りで考える.

$$g_x = 2x + y, \quad g_y = x + 2y$$

$$g_{xx} = 2, \quad g_{xy} = 1, \quad g_{yy} = 2$$

である.

$$\varphi''(0) = \frac{1}{g_y(0,1)^3} \begin{vmatrix} 0 & g_x(0,1) & g_y(0,1) \\ g_x(0,1) & g_{xx}(0,1) & g_{xy}(0,1) \\ g_y(0,1) & g_{yx}(0,1) & g_{yy}(0,1) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4}$$

II $(x, y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ で極大ならば

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x} + \lambda(-p) = 0 & (1) \\ \dfrac{1}{2y} + \lambda(-q) = 0 & (2) \\ I - px - qy = 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する. (1), (2) から

$$x = \frac{1}{2\lambda p}, \quad y = \frac{1}{2\lambda q} \quad \cdots (4)$$

となるので (3) に代入すると

$$I - \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = I - \frac{1}{\lambda} = 0$$

から $\lambda = \dfrac{1}{I}$ となる. (4) に代入すると.

$$x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

となる.

$$L_x = \frac{1}{2x} - \lambda p, \quad L_y = \frac{1}{2y} - \lambda q.$$

から

$$L_{xx} = -\frac{1}{2x^2}, \quad L_{xy} = L_{yx} = 0, \quad L_{yy} = -\frac{1}{2y^2}$$

となる.

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{1}{2x^2} & 0 \\ -q & 0 & -\frac{1}{2y^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{q^2}{2x^2} + \frac{p^2}{2y^2} > 0 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2_{++}\right)$$

から $(x, y) = \left(\dfrac{I}{2p}, \dfrac{I}{2q}\right)$ で極大となる.