1/11 修正版

CalcNT 2019
Lec 13 01/08

I (1) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$ から $(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ となるので

$$\int_1^e \boxed{\frac{\log x}{\sqrt{x}}}\, dx = \int_1^e \log x\, (2\sqrt{x})'\, dx.$$

$0 \leq$

$\log e = 1$

$\log 1 = 0$

$1 < x \Rightarrow \log x \geq 0$.

$$= 2\left[\sqrt{x}\log x\right]_1^e - 2\int_1^e \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\, dx.$$

$$= 2\left(\sqrt{e}\cdot 1 - 1\cdot 0\right) - 2\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

$$= 2\sqrt{e} - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^e = 2\sqrt{e} - 4(\sqrt{e}-1)$$

$$= -2\sqrt{e} + 4.$$

$e = 2.7\ldots < 3 \quad \sqrt{e} < \sqrt{3} = 1.732\ldots$

(2) $$\int_0^1 x^2 (x-1)^2\, dx = \int_0^1 x^2 \left\{\frac{(x-1)^3}{3}\right\}' dx.$$

$''(x^2)'$

$$= \left[x^2\,\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 - \boxed{\frac{2}{3}}\int_0^1 \boxed{x}\,(x-1)^3\, dx$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^1 x\left\{\frac{(x-1)^4}{4}\right\}' dx$$

$$= -\frac{2}{3}\left[x\,\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\int_0^1 (x-1)^4\, dx.$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{(x-1)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{30}\left(0-(-1)\right) = +\frac{1}{30}$$

(3) $$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}(2x+1)'\, dx.$$

$u = 2x+1$ とすると

x	$0 \nearrow 1$
u	$1 \nearrow 3$

$$I = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_1^3 = \sqrt{3} - 1$$

1/11 修正版.

CalcNT 2019
Lec 13 01/08

I (1) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$ から $(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ となるので

$$\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^e \log x\,(2\sqrt{x})'\,dx.$$

$(\log x)' = \frac{1}{x}$.
$\log e = 1$
$\log 1 = 0$

$$= 2\left[\sqrt{x}\log x\right]_1^e - 2\int_1^e \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx.$$

$$= 2\left(\sqrt{e}\cdot 1 - 1\cdot 0\right) - 2\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

$$= 2\sqrt{e} - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^e = 2\sqrt{e} - 4(\sqrt{e}-1)$$

$$= -2\sqrt{e} + 4.$$

$e < 3$ $\sqrt{e} < 1.73\cdots$

(2) $$\int_0^1 x^2(x-1)^2\,dx = \int_0^1 x^2\left\{\frac{(x-1)^3}{3}\right\}'dx.$$

$$= \left[x^2\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 - \boxed{\frac{2}{3}\int_0^1 x}\,(x-1)^3\,dx$$

$\cdots (x^2)'$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^1 x\left\{\frac{(x-1)^4}{4}\right\}'dx$$

$1. \leftarrow (x)'$

$$= -\frac{2}{3}\left[x\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\int_0^1 (x-1)^4\,dx.$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{(x-1)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{30}\left(0-(-1)\right) = +\frac{1}{30}$$

(3) $$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}(2x+1)'\,dx.$$

$u = 2x+1$ とすると

x	$0 \nearrow 1$
u	$1 \nearrow 3$

$$I = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_1^3 = \sqrt{3} - 1$$

$y = e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^u \quad (u = -\frac{1}{2}t^2), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u(-t)$

(4) $\left(e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)' = -t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}$ から $\left(-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)' = t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}$ 3

となるので

$$\int_0^1 t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \left[-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^1 = -\left(e^{-\frac{1}{2}} - 1\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$.

---

(3)の別計算　$2x+1 = t$ となるように、$x = \varphi(t) := \frac{1}{2}(t-1)$

とする。このとき $\varphi'(t) = \frac{1}{2}$ となる。また

t	$1 \nearrow 3$
x	$0 \nearrow 1$

と対応する。よって

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \cdots$$

---

(5)　$t = 3x+1$ となるように $x = \varphi(t) = \frac{1}{3}(t-1)$ とすると $\varphi'(t) = \frac{1}{3}$.

また

t	$1 \nearrow 4$
x	$0 \nearrow 1$

と対応する　よって

$\boxed{dx = \varphi'(t)\,dt}$

$$\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{3}(t-1)\sqrt{t} \cdot \frac{1}{3}\,dt$$

4

$$= \frac{1}{9}\int_1^4 (t\sqrt{t} - \sqrt{t})\,dt$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_1^4 - \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^4$$

$$= \frac{2}{45}(32-1) - \frac{2}{27}(8-1)$$

$$= \frac{116}{135}$$

$$(t\sqrt{t})' = \frac{3}{2}\sqrt{t}$$

$$(t^2\sqrt{t})' = \frac{5}{2}t\sqrt{t}$$

$y = e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^u \quad u = -\frac{1}{2}t^2 \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt} = e^u\cdot(-t)$

4

(4) $\left(e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)' = -t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}$ から $\left(-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)' = t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}$

となるので

$$\int_0^1 t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \left[-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^1 = -\left(e^{-\frac{1}{2}} - \underset{e^0}{\underset{\parallel}{1}}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx}$

---

(3)の別解

$2x+1 = t$ となるように、$x = g(t) := \frac{1}{2}(t-1)$ とする。このとき $g'(t) = \frac{1}{2}$ となる。また

t	$1 \nearrow 3$
x	$0 \nearrow 1$

と対応する。よって

$dx = g'(t)dt$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \cdots$$

---

(5) $t = 3x+1$ となるように $x = g(t) = \frac{1}{3}(t-1)$ とすると $g'(t) = \frac{1}{3}$.

また

t	$1 \nearrow 4$
x	$0 \nearrow 1$

と対応する よって

$$\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\,dx = \int_{0}^{\overset{4}{1}} \frac{1}{3}(t-1)\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}\,dt$$

$$= \frac{1}{9}\int_1^4 (t\sqrt{t} - \sqrt{t})\,dt$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_1^4 - \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^4$$

$$= \frac{2}{45}(32-1) - \frac{2}{27}(8-1)$$

$$= \frac{116}{135}$$

$(t\sqrt{t})' = \frac{3}{2}\sqrt{t}$

$(t^2\sqrt{t})' = \frac{5}{2}t\sqrt{t}$

$\overset{\parallel}{(t^{\frac{5}{2}})'}$

$\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right)' = \sqrt{t}$

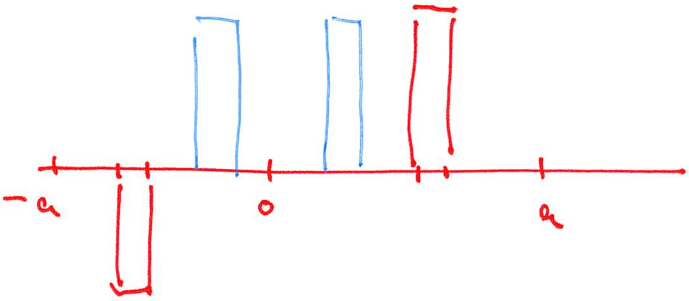
$\left(\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right)' = t\sqrt{t}$

3

$$\int_{-1}^{1} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \left[- e^{-\frac{1}{2}t^2} \right]_{-1}^{1} = - \left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}} \right) = 0$$

$g(t) = t e^{-\frac{1}{2}t^2}$ $g(-t) = -g(t)$ 奇関数

$\Downarrow$ $\int_{-a}^{a} g(\tau) d\tau = 0$



$h(-t) = h(t)$ 偶

$$\int_{-a}^{a} h(t) d\tau = 2 \int_{0}^{a} h(t) d\tau$$

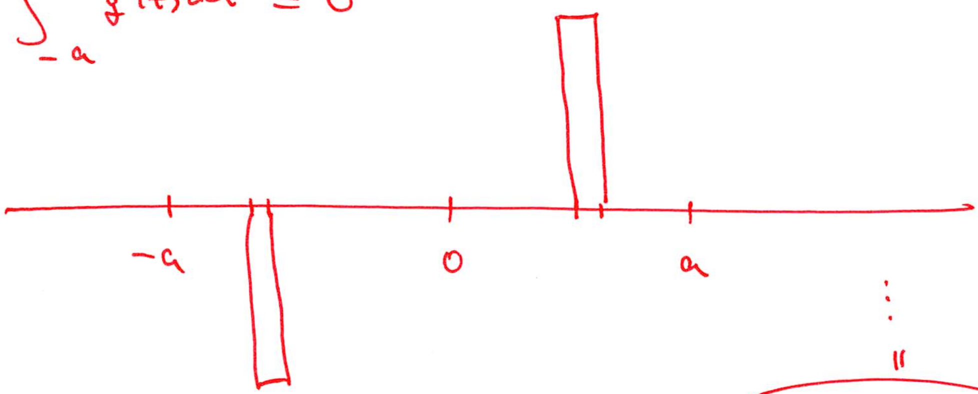
$$\int_{-1}^{1} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = ? \quad \left[-e^{-\frac{1}{2}t^2} \right]_{-1}^{1}$$

$$= -\left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

$g(t) = te^{-\frac{1}{2}t^2} \qquad g(-t) = -g(t) \leftarrow$ 奇関数

odd.

$$\int_{-a}^{a} g(t)\,dt = 0$$



$\vdots$

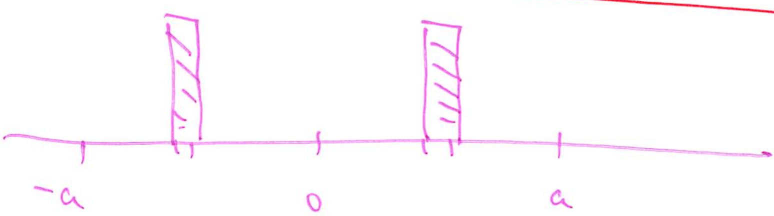
$\|$ $\quad t = -s$ とする.

$$= \int_0^a g(t)\,dt + \overbrace{\int_{-a}^{0} g(t)\,dt}$$

$h(-t) = h(t) \quad \leftarrow$ 偶関数 (3.11) $h(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$$\int_{-a}^{a} h(t)\,dt = 2\int_0^a h(t)\,dt.$$



(6)
$$\boxed{I=\int_0^1 \frac{x-1}{(x-2)^3}\,dx}$$

$t = x - 2$ となるように $x = \varphi(t) = t + 2$ とすると $\varphi'(t) = 1$ となる.

このとき.

t	$-2 \nearrow -1$
x	$0 \nearrow 1$

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{t+1}{t^3}\,dt = \int_{-2}^{-1} \cancel{\left(1+\frac{1}{t}\right)} \left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right) dt$$

注) $(\log|t|)' = \frac{1}{t}$

$$\cancel{= \left[t + \log|t|\right]_{-2}^{-1}}$$

$$\cancel{= (-1-(-2)) + (\log 1 - \log 2)}$$

$$\cancel{= 1 - \log 2.}$$

$$= \left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\right]_{-2}^{-1} = -\left(-1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}$$

別解

$$= \int_{-2}^{-1} \frac{t+1}{t^3}\,dt$$

$$I = \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right)'(t+1)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}(t+1)\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^2}\cdot 1\,dt$$

$(t+1)'$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$= \int_0^1 \frac{(x-2)+1}{(x-2)^3}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^3}$$

(6) $I=\int_0^1 \frac{x-1}{(x-2)^3}dx$ とする。 $t=x-2$ とおくと $x=g(t)=t+2$ とすると $g'(t)=1$ となる。

このとき

t	$-2 \nearrow -1$
x	$0 \nearrow 1$

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{t+1}{t^3}\cdot 1\,dt=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$\cancel{\int_{-2}^{-1}\left(1+\frac{1}{t}\right)dt}$$

注 $(\log|t|)'=\frac{1}{t}$

$$\cancel{=\left[t+\log|t|\right]_{-2}^{-1}}$$

$$\cancel{=(-1-(-2))+(\log 1-\log 2)}$$

$$\cancel{=1-\log 2.}$$

$$=\left[-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\right]_{-2}^{-1}=-\left(-1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{8}$$

別解

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{t+1}{t^3}dt$$

$$I=\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right)'(t+1)\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}(t+1)\right]_{-2}^{-1}+\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}\frac{1}{t^2}\cdot 1\,dt$$

$(t+1)'$

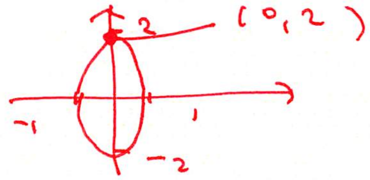
$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_{-2}^{-1}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

$$I=\int_0^1\frac{x-2+1}{(x-2)^3}dx=\int_0^1\frac{1}{(x-2)^2}dx+\int_0^1\frac{1}{(x-2)^3}dx$$

$$\left(\frac{1}{(x-2)}\right)'=-\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)'=-2\frac{1}{(x-2)^3}$$

$g(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$



II

$$\varphi'(0) = \frac{1}{g_y(0,2)^3} \begin{vmatrix} 0 & g_x(0,2) & g_y(0,2) \\ g_x(0,2) & g_{xx}(0,2) & g_{xy}(0,2) \\ g_y(0,2) & g_{yx}(0,2) & g_{yy}(0,2) \end{vmatrix}$$

ここで

$$g_x = 2x, \quad g_y = \frac{y}{2}$$

$$g_{xx} = 2, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0, \quad g_{yy} = \frac{1}{2}$$

から

$$\varphi'(0) = \frac{1}{1^3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -2$$

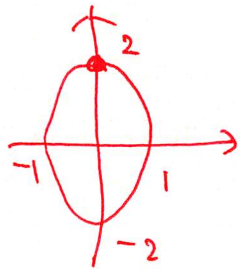
$g(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ 上の $(0, 2)$ $\varphi(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$ 4

II $\varphi'(0) = \frac{1}{g_y(0,2)^3} \begin{vmatrix} 0 & g_x(0,2) & g_y(0,2) \\ g_x(0,2) & g_{xx}(0,2) & g_{xy}(0,2) \\ g_y(0,2) & g_{yx}(0,2) & g_{yy}(0,2) \end{vmatrix}$

なので

$g_x = 2x, \quad g_y = \frac{y}{2}$

$g_{xx} = 2, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0, \quad g_{yy} = \frac{1}{2}$



から

$\varphi'(0) = \frac{1}{1^3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \cancel{1}\ \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2$

Lagrange の未定乗数法（その２）

戸瀬信之

December 19, 2018

制約条件付き極値問題

U を $\mathbf{R}^2$ の開集合とする．２関数

$$f, g : U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとき

問題

$g(x,y) = 0$ の下で $z = f(x,y)$ を極大化（極小化）する

復習—定理

定理

$g(a,b) = 0,\ g_y(a,b) \neq 0$ を満たす $(a,b) \in U$ において制約条件付き極値問題が極大値（極小値）をとるとします．このとき次の (L) を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．

$$\left\{\begin{array}{rcrcll} f_x(a,b) & + & \lambda g_x(a,b) & = & 0 & (1) \\ f_y(a,b) & + & \lambda g_y(a,b) & = & 0 & (2) \\ & & g(a,b) & = & 0 & (3) \end{array}\right. \qquad \text{(L)}$$

ここで (1) と (2) を接線条件と呼びます．

接線条件

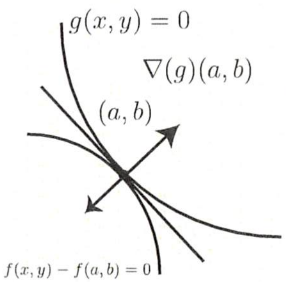
接線条件は

$$\nabla(f)(a,b) = -\lambda \cdot \nabla(g)(a,b)$$

と表せます．$\nabla(f)(a,b)$ は f の等高線

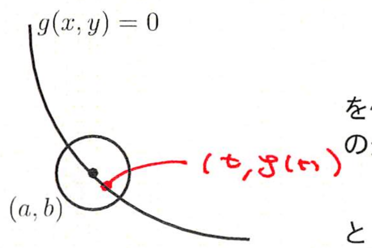
$$f(x,y) - f(a,b) = 0$$

の (a,b) における法線ベクトルです．



２曲線 $g(x,y) = 0$ と $f(x,y) - f(a,b) = 0$ は接線を共有しますから，接していることが分かります．

極大・極小の十分条件



$$g(a,b)=0,\quad g_y(a,b)\neq 0$$

を仮定して, 陰関数定理を適用する. (a,b) の近くで

$$y=\varphi(x)$$

と曲線 $g(x,y)=0$ を表す.

(a,b) で極大（極小）ならば

$$F(t)=f(t,\varphi(t))$$

とすると $F'(a)=0$ が従う.

$\nabla(f)(a,b) + \lambda\nabla(g)(a,b)=\vec{0}$

$g(a,b)=0$

$f_y(a,b)+\lambda g_y(a,b)=0$

$$F''(a)>0\quad(\text{resp.}\quad F''(a)<0$$

ならば (a,b) で極小（resp. 極大）となります.

解法 (2)

$F(t)=f(x(t),y(t)) \rightsquigarrow F'(t)=f_x(\ )\cdot x'(t)$

Chain Rule を使うと Chain Rule $+f_y(\ )\,y'(t)$

$$F'(t)=f_x(t,\varphi(t))\cdot 1+f_y(t,\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

$F(t)=f(t,\varphi(t))$

$$\begin{aligned}F''(t)&=f_{xx}(t,\varphi(t))\cdot 1+f_{xy}(t,\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\\&\quad+\varphi'(t)\left(f_{yx}(t,\varphi(t))\cdot 1+f_{yy}(t,\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\right)\\&\quad+f_y(t,\varphi(t))\cdot\varphi''(t)\\&=f_{xx}(t,\varphi(t))+2f_{xy}(t,\varphi(t))\cdot\varphi'(t)+f_{yy}(t,\varphi(t))\cdot\varphi'(t)^2\\&\quad+f_y(t,\varphi(t))\cdot\varphi''(t)\end{aligned}$$

$f_{xy}=f_{yx}$ by Young.

解法 (3)

さらに $g(t,\varphi(t))\equiv 0$ の両辺を t で微分して

$$g_x(t,\varphi(t))\cdot 1+g_y(t,\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\equiv 0$$

$$\begin{aligned}&g_{xx}(t,\varphi(t))+2g_{xy}(t,\varphi(t))\cdot\varphi'(t)+g_{yy}(t,\varphi(t))\cdot\varphi'(t)^2\\&g_y(t,\varphi(t))\cdot\varphi''(t)\equiv 0\end{aligned}$$

を得ます.

解法 (4)

$t=a$ とするとき $P_0(a,b)$ と定めて

$$\varphi'(a)=-\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}$$

$$\varphi''(a)=-\frac{1}{g_y(a,b)}\left(g_{xx}(P_0)+2g_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a)+g_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2\right)$$

となります.

解法 (5)

さらに　　$g'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$

$$
\begin{aligned}
F''(a) &= f_{xx}(P_0) + 2f_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + f_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2 \\
&\qquad + f_y(P_0)\cdot\varphi''(a) \\
&= f_{xx}(P_0) + 2f_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + f_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2 \\
&\quad \lambda = \boxed{-\frac{f_y(P_0)}{g_y(P_0)}}(g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + g_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2) \\
&= L_{xx}(P_0,\lambda) + 2L_{xy}(P_0,\lambda)\cdot\varphi'(a) + L_{yy}(P_0,\lambda)\cdot\varphi'(a)^2
\end{aligned}
$$

が成立します．ここで　　Lagrange 関数

$$
\lambda = -\frac{f_y(P_0)}{g_y(P_0)}, \quad L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\cdot g(x,y)
$$

としました．　　$\leftarrow f_y(P_0) + \lambda g_y(P_0) = 0$

解法 (6)

さらに　　$g'(a) = -\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}$

$$
\begin{aligned}
&F''(a) \\
&= L_{xx}(P_0,\lambda) + 2L_{xy}(P_0,\lambda)\cdot\left(-\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}\right) + L_{yy}(P_0,\lambda)\cdot\left(-\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{g_y(P_0)^2}\Big(L_{xx}(P_0,\lambda)\cdot g_y(P_0)^2 - 2L_{xy}(P_0,\lambda)\cdot g_x(P_0)g_y(P_0) \\
&\qquad + L_{yy}(P_0,\lambda)\cdot g_x(P_0)^2\Big) \\
&= -\frac{1}{g_y(P_0)^2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & L_{xx}(a,b,\lambda) & L_{xy}(a,b,\lambda) \\ g_y(a,b) & L_{yx}(a,b,\lambda) & L_{yy}(a,b,\lambda) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$F''(a) > 0 \iff |\ | < 0$

定理

定理

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcll}
f_x(a,b) & + & \lambda g_x(a,b) & = & 0 & (1) \\
f_y(a,b) & + & \lambda g_y(a,b) & = & 0 & (2) \\
 & & g(a,b) & = & 0 & (3)
\end{array}
\right. \qquad \text{(L)}
$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在するとします．さらに

$$
F''(a) > 0 \quad B(a,b,\lambda) := \begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & L_{xx}(a,b,\lambda) & L_{xy}(a,b,\lambda) \\ g_y(a,b) & L_{yx}(a,b,\lambda) & L_{yy}(a,b,\lambda) \end{vmatrix}
$$

に対して $B(a,b,\lambda) < 0$ ならば (a,b) で極小となります．
$B(a,b,\lambda) > 0$ ならば (a,b) で極大となります．ここで

$F''(a) < 0$

$$
L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y)
$$

と定めています．

$\varphi''(a)$

$$
\begin{aligned}
\varphi''(a) &= -\frac{1}{g_y(a,b)}\left(g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + g_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2\right) \\
&= -\frac{1}{g_y(a,b)^3}\Big(g_{xx}(P_0)\cdot g_y(P_0)^2 - 2g_{xy}(P_0)\cdot g_x(P_0)g_y(P_0) \\
&\qquad + g_{yy}(P_0)\cdot g_x(P_0)^2\Big) \\
&= \frac{1}{g_y(a,b)^3}\begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & g_{xx}(a,b) & g_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & g_{yx}(a,b) & g_{yy}(a,b) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例

1財　2財
x　y ← 購入量
p　q ← 1単位あたりの価格

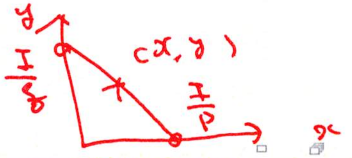
例 $I, p, q > 0$ とする．予算制約

$$g(x,y) = I - px - qy = 0 \quad (x, y > 0)$$

の下で効用関数

$$u(x,y) = \sqrt{xy}$$

を最大化する．この問題は第 1 財，第 2 財の価格が p, q のときに，予算 I をすべて支出して第 1 財を x，第 2 財を y 購入して効用を最大化するという問題である．



制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (2)

(x, y) で極大・極小であるとすると

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} & + & \lambda(-p) & = & 0 & (1) \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} & + & \lambda(-q) & = & 0 & (2) \\ & & I - px - qy & = & 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(1) $\times x$, (2) $\times y$ を考えると

$$\sqrt{xy} = 2\lambda px = 2\lambda qy$$

であることが分かります．(1) を考えると $\lambda \neq 0$ であることが分かりますから

$$px = qy$$

需要関数

さらに (3) から

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad 従って \quad x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (3)

$$x(p,q,I) = \frac{I}{2p}, \quad y(p,q,I) = \frac{I}{2q}$$

を需要関数と呼びます．さらに (1) から Lagrange の未定乗数が

$$\lambda = \frac{1}{2p}\cdot\frac{\sqrt{\frac{I}{2q}}}{\sqrt{\frac{I}{2p}}} = \frac{1}{2\sqrt{pq}}$$

と求まります．この状況で $\lambda(p,q,I)$ を所得の限界効用と呼びます．

所得の限界効用

$$v(p,q,I) = u(x(p,q,I), y(p,q,I)) = \sqrt{\frac{I}{2p}}\cdot\sqrt{\frac{I}{2q}} = \frac{I}{2\sqrt{pq}}$$

を間接効用関数と呼びます．このとき

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{pq}} = \lambda(p,q,I)$$

となります．これが $\lambda(p,q,I)$ が所得の限界効用と呼ばれる理由です．この等式

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

は一般的に成立します．

$$L = \sqrt{xy} + \lambda(I - px - qy)$$

$$u(x,y) = \sqrt{xy}$$

$$g(x,y) = I - px - qy$$

$$L_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \lambda(-p)$$

$$L_y = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \lambda(-q)$$

$$L_{xx} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}, \quad L_{xy} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}, \quad L_{yy} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}$$

$g(x,y) = I - px - qy$

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}} \\ -q & \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}} & -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}} \end{vmatrix}$$

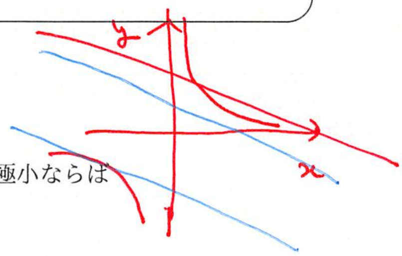
$(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}\cdot q^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}\cdot pq + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}\cdot p^2 > 0$$

から $(x,y) = \left(\frac{I}{2p}, \frac{I}{2q}\right)$ で極大.

Lec 11 (12/25)演習から

III $g(x,y) = 1 - xy = 0$ の下で $z = f(x,y) = x + 2y$ を考えます．停留点を求めて，極大・極小を判定しましょう．



解答

$$g_x = -y,\ g_y = -x,\ f_x = 1,\ f_y = 2$$

と計算されます．$f(x,y)$ が (x,y) において制約 $g(x,y) = 0$ の下で極大または極小ならば

$$\begin{cases} 1 + \lambda(-y) = 0 & (1) \\ 2 + \lambda(-x) = 0 & (2) \\ 1 - xy = 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．

もし $\lambda = 0$ ならば (1) が $1 = 0$ となりますから，(1),(2),(3) の下では $\lambda \neq 0$ であることが分かります．このとき (1) と (2) から

$$x = \frac{2}{\lambda},\quad y = \frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

となります．(4) を用いて (3) から x と y を消去すると

$$1 - \frac{2}{\lambda^2} = 0 \quad 従って \quad \lambda = \pm\sqrt{2} \tag{12}$$

であることが分かります．これから

$$(x,y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad （複号同順）$$

が停留点であることが示されました．

さらに

$$g_{xx}\ g_{yy} = 0,\ g_{xy} = g_{yx} = -1$$
$$f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = f_{yy} = 0$$

$f_{**} = 0$

$L = f + \lambda g$

$L_{**} = f_{**} + \lambda g_{**}$

$= \lambda g_{**}$

と計算すると Lagrange 関数 $L = f + \lambda g$ が

$$B := \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -y & -x \\ -y & 0 & -\lambda \\ -x & -\lambda & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -2\lambda xy = -2\lambda$$

1

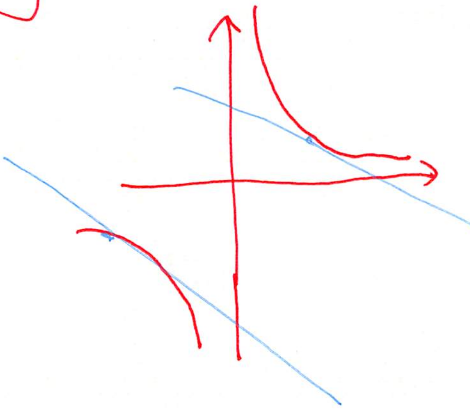
を満たします．

(i) $(x,y,\lambda) = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ において

$$B = -2\sqrt{2} < 0$$

となりますから f は制約条件 $g = 0$ の下で極小であることが分かります．

(ii) $(x,y,\lambda) = (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$ において



$$B = 2\sqrt{2} > 0$$

となりますから f は制約条件 $g = 0$ の下で極大であることが分かります．

I $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ 上の $(0,1)$ の周りで $y = \varphi(x) = \dfrac{-x \pm \sqrt{4-3x^2}}{2}$

とする. $\varphi''(0)$ を g の1階, 2階偏微分係数で求める.

$I, p, q > 0$

II $g(x,y) = I - px - qy = 0$ の下で

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y$$

を考える. 停留点を求めて極大であることを示す.