1/11 修正版.

CalcNT 2019
Lec 13 01/08

I (1) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$ から $(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ となるので

$$\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^e \log x\,(2\sqrt{x})'\,dx.$$

$$= 2\left[\sqrt{x}\log x\right]_1^e - 2\int_1^e \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx.$$

$$= 2(\sqrt{e}\cdot 1 - 1\cdot 0) - 2\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

$$= 2\sqrt{e} - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^e = 2\sqrt{e} - 4(\sqrt{e}-1)$$

$$= -2\sqrt{e} + 4.$$

(2) $$\int_0^1 x^2(x-1)^2\,dx = \int_0^1 x^2\left\{\frac{(x-1)^3}{3}\right\}'dx.$$

$$= \left[x^2\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 x(x-1)^3\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^1 x\left\{\frac{(x-1)^4}{4}\right\}'dx$$

$$= -\frac{2}{3}\left[x\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_0^1 (x-1)^4\,dx.$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{(x-1)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{30}(0-(-1)) = +\frac{1}{30}$$

(3) $$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}(2x+1)'\,dx.$$

$u = 2x+1$ とすると

| $x$ | $0 \nearrow 1$ |
|---|---|
| $u$ | $1 \nearrow 3$ |

$$I = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_1^3 = \sqrt{3} - 1$$

(4) $\left(e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)' = -t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}$ から $\left(-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)' = t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}$

となるので

$$\int_0^1 t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \left[-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^1 = -\left(e^{-\frac{1}{2}} - 1\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

---

(3)の別解　$2x+1=t$ となるように、$x = g(t) := \frac{1}{2}(t-1)$

とする。このとき $g'(t) = \frac{1}{2}$ となる。また

| $t$ | $1 \nearrow 3$ |
|---|---|
| $x$ | $0 \nearrow 1$ |

と対応する。よって

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \cdots$$

---

(5)　$t = 3x+1$ となるように $x = g(t) = \frac{1}{3}(t-1)$ とすると $g'(t) = \frac{1}{3}$.

また

| $t$ | $1 \nearrow 4$ |
|---|---|
| $x$ | $0 \nearrow 1$ |

と対応する。よって

$$\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\,dx = \int_0^{1 \leftarrow 4} \frac{1}{3}(t-1)\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}\,dt$$

$$= \frac{1}{9}\int_1^4 \left(t\sqrt{t} - \sqrt{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_1^4 - \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^4$$

$$= \frac{2}{45}(32-1) - \frac{2}{27}(8-1)$$

$$= \frac{116}{135}$$

$$(t\sqrt{t})' = \frac{3}{2}\sqrt{t}$$

$$(t^2\sqrt{t})' = \frac{5}{2}t\sqrt{t}$$

(6)

$$\boxed{I = \int_0^1 \frac{x-1}{(x-2)^3}\,dx}$$

$t = x - 2$ となるように $x = g(t) = t + 2$ とすると $g'(t) = 1$ となる。

ここで、

| $t$ | $-2 \nearrow -1$ |
|---|---|
| $x$ | $0 \nearrow 1$ |

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{t+1}{t^3}\,dt = \int_{-2}^{-1} \cancel{\left(1 + \frac{1}{t}\right)}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$

注 $(\log|t|)' = \frac{1}{t}$

$$\cancel{= \Big[t + \log|t|\Big]_{-2}^{-1}}$$

$$\cancel{= (-1 - (-2)) + (\log 1 - \log 2)}$$

$$\cancel{= 1 - \log 2.}$$

$$= \left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\right]_{-2}^{-1} = -\left(-1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}$$

別解

$$I = \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right)'(t+1)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}(t+1)\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

II

$$\varphi'(0) = \frac{1}{g_y(0,2)^3} \begin{vmatrix} 0 & g_x(0,2) & g_y(0,2) \\ g_x(0,2) & g_{xx}(0,2) & g_{xy}(0,2) \\ g_y(0,2) & g_{yx}(0,2) & g_{yy}(0,2) \end{vmatrix}$$

なので

$$g_x = 2x, \quad g_y = \frac{y}{2}$$

$$g_{xx} = 2, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0, \quad g_{yy} = \frac{1}{2}$$

から

$$\varphi'(0) = \frac{1}{1^3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$