2019 年 12 月 25 日演習問題解答

I 以下の積分の値を求めましょう．
(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t dt$, **(2)** $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx$, **(3)** $\int_0^1 x(x-1)^3dx$, **(4)** $\int_0^6 \left(\frac{1}{3}x-1\right)^4 dx$, **(5)** $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{(2x+1)^3}dx$,
(6) $\int_0^1 (x+1)e^x dx$, **(7)** $\int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1)dx$ （部分積分で）

解答 **(1)** $(\cos t)' = -\sin t$ から $(-\cos t)' = \sin t$ であることが分かります．

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(-\cos t)' dt = -[t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \\
&= -\left(\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2} - 0\cdot\cos 0\right) + [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1
\end{aligned}$$

(2) $\left(\sqrt{x+2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ から $\left(2\sqrt{x+2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ が分かります．これから

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx = \left[2\sqrt{x+2}\right]_{-1}^1 = 2\left(\sqrt{3}-1\right)$$

(3)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(x-1)^3 dx &= \int_0^1 x\left\{\frac{(x-1)^4}{4}\right\}' dx \\
&= \left\{x\cdot\frac{(x-1)^4}{4}\right\}_0^1 - \int_0^1 \frac{(x-1)^4}{4}dx \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{(x-1)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

（別解）

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(x-1)^3 dx &= \int_0^1 (x-1+1)(x-1)^3 dx \\
&= \int_0^1 (x-1)^4 dx + \int_0^1 (x-1)^3 dx \\
&= \left[\frac{(x-1)^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^1 \\
&= -\frac{(-1)^5}{5} + \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

(4) $\left\{\left(\frac{x}{3}-1\right)^5\right\}' = \frac{5}{3}\left(\frac{x}{3}-1\right)^4$ から

$$\frac{3}{5}\left\{\left(\frac{x}{3}-1\right)^5\right\}' = \left(\frac{x}{3}-1\right)^4$$

を得ます．

$$\int_0^6 \left(\frac{1}{3}x-1\right)^4 dx = \left[\frac{3}{5}\left(\frac{x}{3}-1\right)^5\right]_0^6 = \frac{3}{5}\left(1^5-(-1)^5\right) = \frac{6}{5}$$

(5) $\left\{\frac{1}{(2x+1)^2}\right\}' = -\frac{2\cdot 2}{(2x+1)^3} = -\frac{4}{(2x+1)^3}$ から $\left\{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(2x+1)^2}\right\}' = \frac{1}{(2x+1)^3}$ となりますから

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-1}\frac{1}{(2x+1)^3}dx &= \left\{-\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot 2}{(2x+1)^2}\right\}_{-3}^{-1} \\ &= -\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{25}\right) = -\frac{6}{25}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+1)e^x dx &= \int_0^1 (x+1)(e^x)'dx \\ &= [(x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= 2e-1-[e^x]_0^1 = 2e-1-(e-1) = e\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1)dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{(x+1)^4}{4}\right)'(x-1)dx \\ &= \left[\frac{(x+1)^4}{4}\cdot(x-1)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^4}{4}dx \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{(x+1)^5}{5}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{2^5}{5} = -\frac{8}{5}\end{aligned}$$

II (1) $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}}dx$, **(2)** $\int_0^1 \frac{x-1}{(2-x)^2}dx$, **(3)** $\int_1^2 x\sqrt{2-x}dx$, **(4)** $\int_0^6 \left(\frac{x}{3}-1\right)^4 dx$, **(5)** $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x+1}dx$, **(6)** $\int_1^2 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx$, **(7)** $\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}dx$, **(8)** $\int_0^1 \sqrt{3-2x}dx$

解答 **(1)** $t=3-x$ となるように $x=\varphi(t):=3-t$ とおくと $\varphi'(t)=-1$, $\varphi(2)=1$, $\varphi(-1)=4$ となるので

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}}dx &= \int_4^1 \frac{3-t}{\sqrt{t}}(-1)dt \\ &= \int_1^4 \left(\frac{3}{\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)dt \\ &= 3\left[2\sqrt{t}\right]_1^4 - \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^4 \\ &= 3\cdot 2(1-0) - \frac{2}{3}(8-1) = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

ここで対応

t	4	$\searrow$	1
x	-1	$\nearrow$	2

を用いました.

(別解) $t=\sqrt{3-x}$ となるように $x=\varphi(t):=3-t^2$ とおきます．$t\geq 0$ であるので $x=-1$ には $t=\sqrt{4}=2$, $x=2$ には $t=\sqrt{1}=1$ が対応します．従って対応

$$\begin{array}{c|ccc} t & 2 & \searrow & 1 \\ \hline x & -1 & \nearrow & 2 \end{array}$$

を用います．このとき $\varphi'(t)=-2t$ となりますから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{3-x}}dx &= \int_{2}^{1}\frac{3-t^2}{t}\cdot(-2t)dt \\ &= 2\int_{1}^{2}(3-t^2)dt \\ &= 6\,[t]_1^2 - 2\left[\frac{t^2}{3}\right]_1^2 \\ &= 6-2\frac{8-1}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

(2) $t=2-x$ となるように $x=\varphi(t):=2-t$ とすると対応

$$\begin{array}{c|ccc} t & 2 & \searrow & 1 \\ \hline x & 0 & \nearrow & 1 \end{array}$$

が定まります．$\varphi'(t)=-1$ から

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\frac{x-1}{(2-x)^2}dx &= \int_{2}^{1}\frac{1-t}{t^2}(-1)dt \\ &= \int_{1}^{2}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt \\ &= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 - [\log t]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}+1\right)-(\log 2-\log 1) = \frac{1}{2}-\log 2\end{aligned}$$

(3) $t=2-x$ となるように $x=\varphi(t):=2-t$ とすると対応

$$\begin{array}{c|ccc} t & 2 & \searrow & 1 \\ \hline x & 0 & \nearrow & 1 \end{array}$$

が定まります．$\varphi'(t)=-1$ から

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2}x\sqrt{2-x}dx &= \int_{1}^{0}(2-t)\sqrt{t}(-1)dt \\ &= \int_{0}^{1}\left(2\sqrt{t}-t\sqrt{t}\right)dt \\ &= 2\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}-\frac{2}{5} = \frac{14}{15}\end{aligned}$$

(4) $y=\varphi(x)=\frac{x}{3}-1$ とすると $\varphi'(x)=\frac{1}{3}$ となります.

$$\begin{aligned}\int_0^6\left(\frac{1}{3}x-1\right)^4dx&=3\int_0^6\left(\frac{1}{3}x-1\right)^4\left(\frac{1}{3}x-1\right)'dx\\&=\frac{1}{3}\int_{-1}^1y^4dy=3\cdot\left[\frac{y^5}{5}\right]_{-1}^1=3\cdot\frac{1^5-(-1)^5}{5}=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

ここで対応

x	0	$\nearrow$	6
y	-1	$\nearrow$	1

を用いました.

(5) $y=\varphi(x)=e^x+1$ とすると $\varphi'(x)=e^x$, $\varphi(2)=e^2+1$, $\varphi(1)=e+1$ から

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{e^x}{e^x+1}dx&=\int_{e+1}^{e^2+1}\frac{1}{y}dy\\&=[\log y]_{e+1}^{e^2+1}=\log(e^2+1)-\log e+1=\log\frac{e^2+1}{e+1}\end{aligned}$$

(6) $y=\varphi(x)=e^x+1$ とすると $\varphi'(x)=e^x$, $\varphi(2)=e^2+1$, $\varphi(1)=e+1$ から

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx&=\int_{e+1}^{e^2+1}\frac{1}{y^2}dy\\&=\left[-\frac{1}{y}\right]_{e+1}^{e^2+1}=-\frac{1}{e+1}+\frac{1}{e^2+1}=\frac{e(e-1)}{(e+1)(e^2+1)}\end{aligned}$$

(7) $x=\varphi(x)=\log t$ とすると $\varphi'(t)=\frac{1}{t}$, $\varphi(e)=1$, $\varphi(1)=0$ から

$$\int_1^e\frac{(\log t)^2}{t}dt=\int_0^1x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(8) $y=\varphi(x)=3-2x$ とすると $\varphi'(y)=-2$ である．さらに $\varphi(1)=1$, $\varphi(0)=3$ であるので

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{3-2x}dx&=-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{3-2x}(3-2x)'dx\qquad=-\frac{1}{2}\int_3^1\sqrt{y}dy=\frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{y}dy\\&=\frac{1}{2}\left[y\sqrt{y}\right]_1^3=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)\end{aligned}$$

III $g(x,y) = 1 - xy = 0$ の下で $z = f(x,y) = x + 2y$ を考えます．停留点を求めて，極大・極小を判定しましょう．

解答

$$g_x = -y,\ g_y = -x,\ f_x = 1,\ f_y = 2$$

と計算されます．$f(x,y)$ が (x,y) において制約 $g(x,y) = 0$ の下で極大または極小ならば

$$\begin{cases} 1 & + & \lambda(-y) & = & 0 & (1) \\ 2 & + & \lambda(-x) & = & 0 & (2) \\ & & 1 - xy & = & 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．

もし $\lambda = 0$ ならば (1) が $1 = 0$ となりますから，(1),(2),(3) の下では $\lambda \neq 0$ であることが分かります．このとき (1) と (2) から

$$x = \frac{2}{\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

となります．(4) を用いて (3) から x と y を消去すると

$$1 - \frac{2}{\lambda^2} = 0 \quad 従って \quad \lambda = \pm\sqrt{2} \tag{12}$$

であることが分かります．これから

$$(x,y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad （複号同順）$$

が停留点であることが示されました．

さらに

$$\begin{aligned} g_{xx}\ g_{yy} = 0,\ g_{xy} = g_{yx} = -1 \\ f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = f_{yy} = 0 \end{aligned}$$

と計算すると Lagrange 関数 $L = f + \lambda g$ が

$$\begin{aligned} B := \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -y & -x \\ -y & 0 & -\lambda \\ -x & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ = -2\lambda xy = -2\lambda \end{aligned}$$

を満たします．

(i) $\underline{(x,y,\lambda) = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\ \text{において}}$

$$B = -2\sqrt{2} < 0$$

となりますから f は制約条件 $g = 0$ の下で極小であることが分かります．

(ii) $\underline{(x,y,\lambda) = (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})\ \text{において}}$

$$B = 2\sqrt{2} > 0$$

となりますから f は制約条件 $g = 0$ の下で極大であることが分かります．

IV $g(x,y)=x^2-y^2-1=0$ をその上の点 $(2,\sqrt{3})$ の近傍で解いて

$$\varphi(x)=\sqrt{x^2-1} \tag{13}$$

とします．$\varphi''(2)$ を g の 1 階および 2 階の偏微分係数を用いて求めましょう．

解答

$$\begin{aligned} &g_x=2x,\ g_y=-2y, \\ &g_{xx}=2,\ g_{xy}=g_{yx}=0,\ g_{yy}=-2 \end{aligned}$$

と計算します．このとき

$$\begin{aligned} \varphi''(2)&=\frac{1}{g_y(2,\sqrt{3})^3}\begin{vmatrix} 0 & g_x(2,\sqrt{3}) & g_y(2,\sqrt{3}) \\ g_x(2,\sqrt{3}) & g_{xx}(2,\sqrt{3}) & g_{xy}(2,\sqrt{3}) \\ g_y(2,\sqrt{3}) & g_{yx}(2,\sqrt{3}) & g_{yy}(2,\sqrt{3}) \end{vmatrix}=\frac{1}{(-2\sqrt{3})^3}\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2\sqrt{3} \\ 4 & 2 & 0 \\ -2\sqrt{3} & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &=-\frac{1}{24\sqrt{3}}(-4\cdot 4\cdot(-2)-(-2\sqrt{3})\cdot(-2\sqrt{3})\cdot 2)=-\frac{8}{24\sqrt{3}}=-\frac{1}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

V $g(x,y)=x+2y-1=0$ の下で $z=f(x,y)=xy$ を考えます．停留点を求めて極大・極小を判定しましょう．

解答

$$g_x=1,\ g_y=2,\ f_x=y,\ f_y=x$$

と計算します．$f(x,y)$ が (x,y) において制約条件 $g(x,y)=0$ の下で極大または極小ならば

$$\left\{\begin{array}{ccccc} y & + & \lambda\cdot 1 & = & 0 \quad (1) \\ x & + & \lambda\cdot 2 & = & 0 \quad (2) \\ & & x+2y-1 & = & 0 \quad (3) \end{array}\right.$$

を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．このとき (1) と (2) から

$$x=-2\lambda,\quad y=-\lambda \tag{4}$$

が従います．さらに (1) の y を $y=-2\lambda$ によって消去すると

$$-2\lambda-2\lambda-1=0 \quad すなわち \quad \lambda=-\frac{1}{4}$$

であることが分かります．これから

$$x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{4}$$

が従います．さらに

$$\begin{aligned} &g_{xx}=g_{xy}=g_{yx}=g_{xx}=0 \\ &f_{xx}=0,\ f_{xy}=f_{yx}=1,\ f_{yy}=0 \end{aligned}$$

と計算します．すると Lagrange 関数 $L = f + \lambda g$ が

$$\begin{aligned} B &:= \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4 > 0 \end{aligned}$$

を満たしますから f は $(x, y, \lambda) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ において制約条件 $g = 0$ の下で極大であることが分かります．