2019 年 12 月 18 日小テスト解答

I $I, p, q > 0$ とします．制約条件（予算制約）

$$g(x,y) := I - px - qy = 0$$

の下で効用関数

$$u(x,y) := x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

を考えます．停留点を求めましょう．

解答　(x,y) で極値を取るとすると

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} + \lambda\cdot(-p) = 0 & (1) \quad \leftrightarrow \quad u_x + \lambda g_x = 0 \\ \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}} + \lambda\cdot(-q) = 0 & (2) \quad \leftrightarrow \quad u_y + \lambda g_y = 0 \\ I - px - qy = 0 & (3) \quad \leftrightarrow \quad g = 0 \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(1) において $\lambda = 0$ とすると

$$\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} = 0$$

となりますが,$x, y > 0$ に反します．よって $\lambda \neq 0$ であることが分かります．$(1)\times x$, $(2)\times y$ から

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} &= 4\lambda px \\ x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} &= 4\lambda qy \end{aligned}$$

が従いますが，$\lambda \neq 0$ から $px = qy$ であることが分かります．これから (3) を用いて

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad \text{従って} \quad x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

であることが分かります[*1]．さらに (1) から

$$\lambda = \frac{1}{4p}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{I^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}}$$

であることも分かります．

補足　2 階の偏微分係数を用いて極大・極小を判定します．

$$\begin{aligned} &g_{*\#} = 0 \quad (*, \# = x, y) \\ &f_{xx} = -\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{4}},\ f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{16}x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}},\ f_{yy} = -\frac{3}{16}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{7}{16}} \end{aligned}$$

から $L = f + \lambda g$ とおくと

$$\begin{aligned} B &= \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{4}} & \frac{1}{16}x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} \\ -q & \frac{1}{16}x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} & -\frac{3}{16}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{7}{4}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{4}}q^2 + \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}pq + \frac{3}{16}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{7}{4}}p^2 > 0 \end{aligned}$$

[*1] この関数 $x = x(p,q,I)$，$y = y(p,q,I)$ を需要関数と呼びます．

から，停留点

$$(x,y,\lambda)=\left(\frac{I}{2p},\frac{I}{2q},\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{I^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}}\right)$$

で極大値をとることが分かります．

II 以下の積分の値を求めましょう．
(1) $\int_0^1 t^4dt$ **(2)** $\int_0^1 e^{2t}dt$ **(3)** $\int_1^{e^2}\frac{1}{t}dt$ **(4)** $\int_0^9\sqrt{t}dt$
(5) $\int_1^9\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ **(6)** $\int_1^3\sqrt{t+1}dt$ **(7)** $\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^4dt&=\int_0^1\left(\frac{1}{5}t^5\right)'dt\\&=\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2t}dt&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)'dt\\&=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2}\frac{1}{t}dt&=\int_1^{e^2}(\log t)'dt\\&=[\log t]_1^{e^2}=2\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int_0^9\sqrt{t}dt&=\int_0^9\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right)'dt\\&=\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^9=6\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\int_1^9\frac{1}{\sqrt{t}}dt&=\int_1^9\left(2\sqrt{t}\right)'dt\\&=\left[2\sqrt{t}\right]_1^9=2(3-1)=4\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\int_0^3\sqrt{t+1}dt&=\int_0^3\left(\frac{2}{3}(t+1)\sqrt{t+1}\right)'dt\\&=\left[\frac{2}{3}(t+1)\sqrt{t+1}\right]_0^3=\frac{14}{3}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{1}{x^2}dx&=\int_1^2\left(-\frac{1}{x}\right)'dx\\&=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{1}{2}\end{aligned}$$