2019 L11 12/18

CalcNT19w
L10 12/11

(1

$x - y = c$

$\to y = x - c$

I $g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ の下で $z = f(x,y) = x - y$

$$g_x = 2x,\quad g_y = \frac{2}{9}y,\quad f_x = 1,\quad f_y = -1$$

となる. (x,y) で極大(小)ならば

$$\begin{cases} 1 + \lambda \cdot 2x = 0 & (1) \\ -1 + \lambda \cdot \frac{2y}{9} = 0 & (2) \\ x^2 + \frac{y^2}{9} - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する. (1) において $\lambda = 0$ とすると

$$1 = 0$$

となるので $\lambda \neq 0$ が分かる. よって

$$x = -\frac{1}{2\lambda},\quad y = \frac{9}{2\lambda}$$

と表される. (3) に代入すると

$$1 = \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{9}\frac{81}{4\lambda^2} = \frac{1}{4\lambda^2}(1+9) = \frac{10}{4\lambda^2}$$

から

$$\frac{1}{2\lambda} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\quad 従って\quad \lambda = \pm\cancel{\frac{1}{2\sqrt{10}}}\quad \frac{\sqrt{10}}{2}$$

であることが分かる. このとき

$$x = \mp\frac{1}{\sqrt{10}},\quad y = \pm\frac{9}{\sqrt{10}}$$

となる. 以上で停留点は

$$(x, y, \lambda) = \left(\mp\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{9}{\sqrt{10}}, \pm\cancel{\frac{1}{2\sqrt{10}}}\right)\ (複号同順)$$

II $g(x,y)=x+2y-1=0$ の下で $z=f(x,y)=x^2+4y^2$

$$g_x=1,\quad g_y=2,\quad f_x=2x,\quad f_y=8y$$

となる。(x,y) で極大（または極小）ならば

$$\begin{cases} 2x+\lambda\cdot 1 = 0 & (1) \\ 8y+\lambda\cdot 2 = 0 & (2) \\ x+2y-1 = 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在する. (1), (2) から

$$x=-\frac{\lambda}{2},\quad y=-\frac{1}{4}\lambda \qquad \cdots\cdots (4)$$

となるので (3) に代入して

$$0=-\frac{\lambda}{2}-\frac{2}{4}\lambda-1=-\lambda-1$$

従って $\lambda=-1$ となる. このとき (4) に代入して

$$x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{4}$$

となる. 以上で

$$(x,y,\lambda)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},-1\right)$$

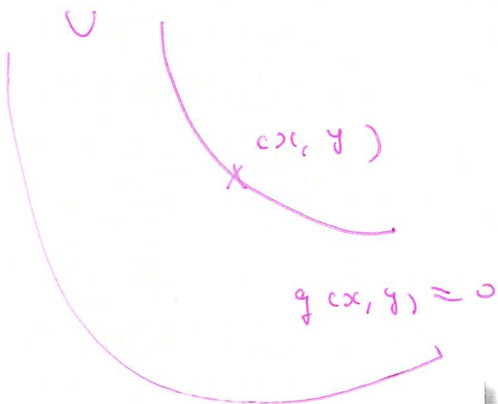
が停留点であることが分かる.

Lagrange の未定乗数法（その２）

戸瀬信之

December 19, 2018

制約条件付き極値問題



U を $\mathbf{R}^2$ の開集合とする．２関数

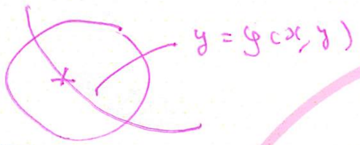
$$f, g: U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとき

問題

$g(x,y)=0$ の下で $z=f(x,y)$ を極大化（極小化）する

復習—定理



(a,b) の近くで $y=\varphi(x)$ と書ける.

定理

$g(a,b)=0,\ g_y(a,b)\neq 0$ を満たす $(a,b)\in U$ において制約条件付き極値問題が極大値（極小値）をとるとします．このとき次の (L) を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．

$\nabla(g)(a,b)$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \boxed{f_x(a,b)} & + & \lambda \boxed{g_x(a,b)} & = & 0 \quad (1)\\ f_y(a,b) & + & \lambda g_y(a,b) & = & 0 \quad (2)\\ & & g(a,b) & = & 0 \quad (3)\end{array}\right. \qquad \text{(L)}$$

ここで (1) と (2) を接線条件と呼びます．

$\nabla(f)(a,b)$

接線条件

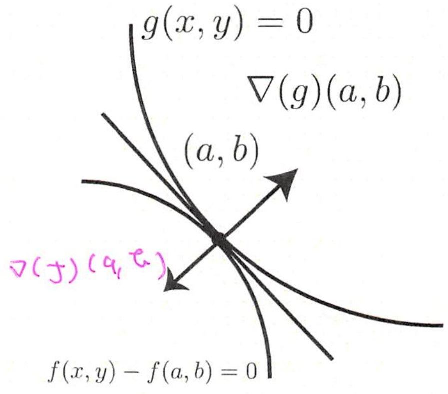
接線条件は

$$\nabla(f)(a,b)=-\lambda\cdot\nabla(g)(a,b)$$

と表せます．$\nabla(f)(a,b)$ は f の等高線

$$f(x,y)-f(a,b)=0$$

の (a,b) における法線ベクトルです．



2 曲線 $g(x,y)=0$ と $f(x,y)-f(a,b)=0$ は接線を共有しますから，接していることが分かります．

制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例

予算 Income.

$cx^{\alpha}y^{\beta}$
コブ・ダグラス型 効用関数.

例 $I, p, q > 0$ とする．予算制約

$$g(x,y) = I - px - qy = 0 \quad (x, y > 0)$$

の下で効用関数

$$u(x,y) = \sqrt{xy}$$

を最大化する．この問題は第 1 財，第 2 財の価格が p, q のときに，予算 I をすべて支出して第 1 財を x，第 2 財を y 購入して効用を最大化するという問題である．

財 Goods

	1財	2財
購入量	x	y
価格	p	q

制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (2)

(x,y) で極大・極小であるとすると

$u_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$, $u_y = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

$x, y > 0$

$$0 < \left\{\begin{array}{rcrcl} \boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}} & + & \lambda(-p) & = & 0 \quad (1) \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} & + & \lambda(-q) & = & 0 \quad (2) \\ & & I - px - qy & = & 0 \quad (3) \end{array}\right.$$

($\sqrt{t}$ $t=0$ で微分できない)

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(1) $\times x$，(2) $\times y$ を考えると

$\lambda = 0$　$\square = 0$　impossible $\to \lambda \neq 0$

$$\sqrt{xy} = 2\lambda px = 2\lambda qy$$

であることが分かります．(1) を考えると $\lambda \neq 0$ であることが分かりますから

$$px = qy$$

さらに (3) から

需要関数.

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad 従って \quad x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (3)

$$x(p,q,I) = \frac{I}{2p}, \quad y(p,q,I) = \frac{I}{2q}$$

を需要関数と呼びます．さらに (1) から Lagrange の未定乗数が

$\lambda = \frac{1}{2p} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

$$\lambda = \frac{1}{2p} \cdot \frac{\sqrt{\frac{I}{2q}}}{\sqrt{\frac{I}{2p}}} = \frac{1}{2\sqrt{pq}}$$

と求まります．この状況で $\lambda(p,q,I)$ を所得の限界効用と呼びます．

所得の限界効用

$u(x,y) = \sqrt{xy}$

$$v(p,q,I) = u(x(p,q,I), y(p,q,I)) = \sqrt{\frac{I}{2p}} \cdot \sqrt{\frac{I}{2q}} = \frac{I}{2\sqrt{pq}}$$

を間接効用関数と呼びます．このとき

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{pq}} = \lambda(p,q,I)$$

となります．これが $\lambda(p,q,I)$ が所得の限界効用と呼ばれる理由です．この等式

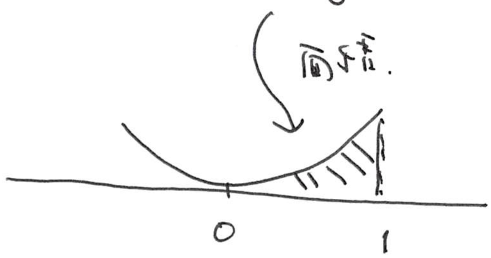
$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

は一般的に成立します．

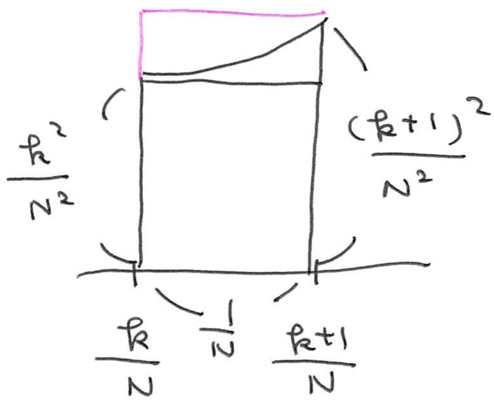
CT 152P.

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2 \qquad \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

面積.



N 等分



$\int_0^1 x^2\,dx$ の意味

$$s_N = \frac{0^2}{N^3} + \frac{1^2}{N^3} + \cdots + \frac{(N-1)^2}{N^3}$$

$$= \frac{1}{N^3}\sum_{k=1}^{N-1} k^2 = \frac{1}{N^3}\cdot\frac{1}{6}(N-1)N(2N-1)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(2-\frac{1}{N}\right)$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$S_N = \frac{1^2}{N^3} + \cdots + \frac{N^2}{N^3} = \frac{1}{N^3}\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(2+\frac{1}{N}\right) \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{ccccc} s_N & \leq & S & \leq & S_N \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \frac{1}{3} & & & & \frac{1}{3} \end{array}$$

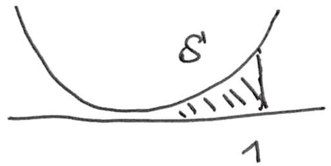
はさみうち

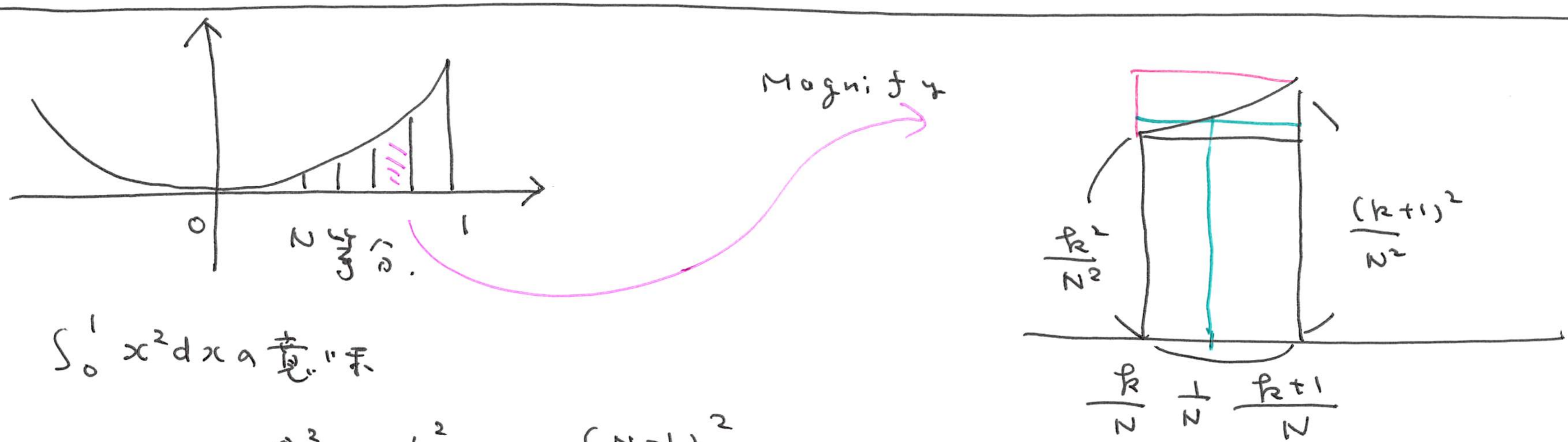
$\rightsquigarrow$ $S = \frac{1}{3}$.

CT 152p

$y = x^2$ $\quad \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2, \quad \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$





$\int_0^1 x^2\,dx$ の意味

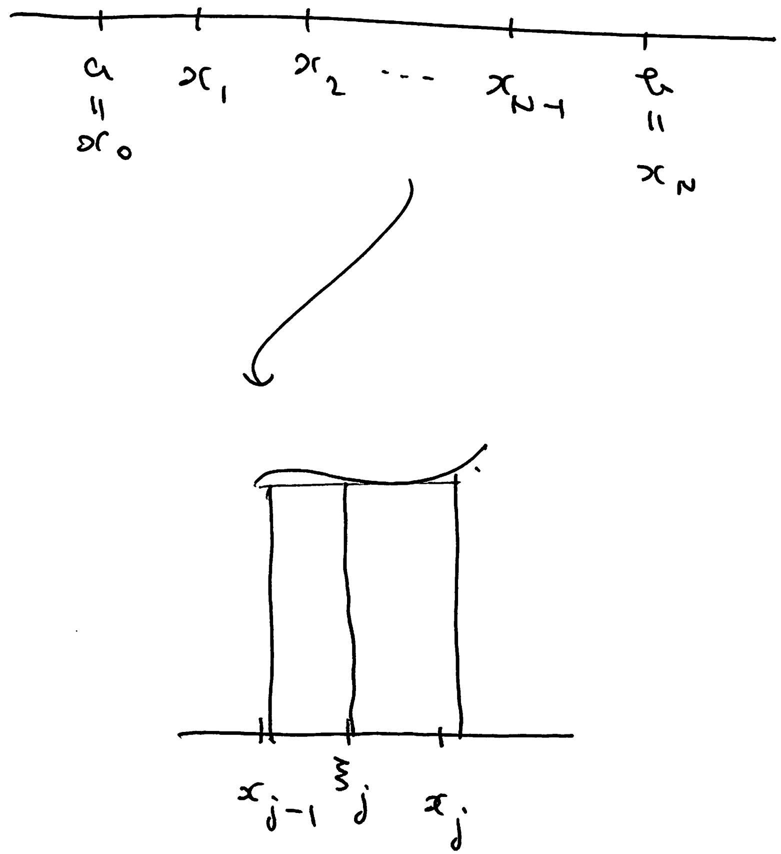
$$s_N = \frac{0^2}{N^3} + \frac{1^2}{N^3} + \cdots + \frac{(N-1)^2}{N^3} = \frac{1}{N^3}\sum_{k=1}^{N-1} k^2 \qquad \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{N^3}\,N(N-1)(2N-1) = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(2-\frac{1}{N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$S_N = \frac{1^2}{N^3} + \frac{2^2}{N^3} + \cdots + \frac{N^2}{N^3} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(2+\frac{1}{N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{ccccc} s_N & \le & S & \le & S_N \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \frac{1}{3} & & & & \frac{1}{3} \end{array} \qquad \checkmark\text{はさみうち} \quad S = \frac{1}{3}.$$

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$



Riemann 和　　　　f が 連続 だと OK.

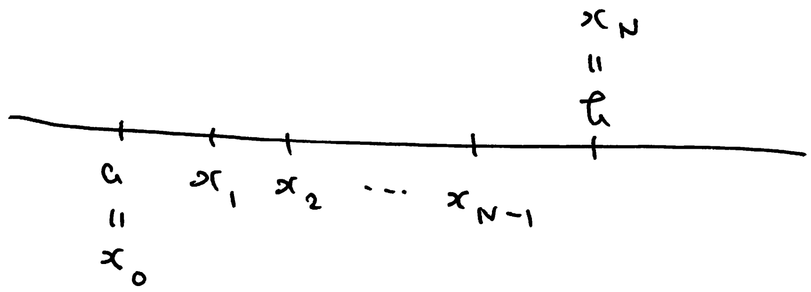
$$\| \atop \sum f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

$$\downarrow$$

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

$$\left(\begin{array}{c} \Delta := \max(x_j - x_{j-1}) \longrightarrow 0 \\ \text{とする} \end{array} \right)$$

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

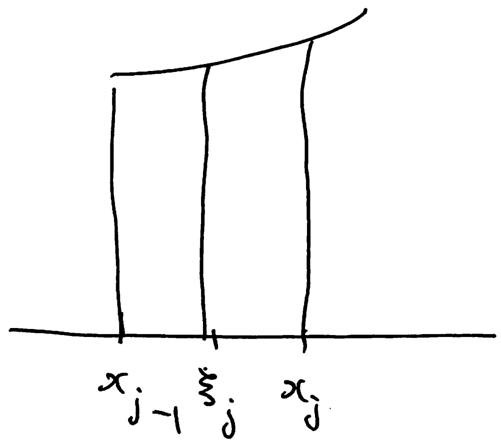


Riemann 和

$$\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1})$$

$$\downarrow ?$$

$$\int_a^b f(t)\,dt$$



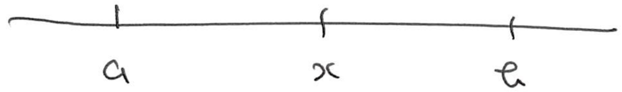
$\delta := \max (x_j - x_{j-1}) \longrightarrow 0$

<u>定理</u> ok for f 連続.

微分積分学の基本定理.

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



$\Longrightarrow$ 各点で F は微分可能で

$$F'(x) = f(x)$$

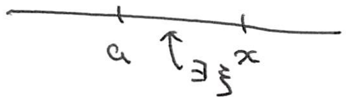
定理 $G'(x) = f(x)$　　G は f の原始関数, 不定積分.

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

証明　$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$.

$g' \equiv 0$, $\rightsquigarrow g \equiv C$

$a \neq x$



平均値の定理.

$g(x) - g(a) = g'(\xi)(x - a)$

$= 0(x - a)$

$\rightsquigarrow g(x) = g(a)$

$\rightsquigarrow G - F \equiv C$ 定数.

$= \int_a^a f(t)\,dt = 0$

$x = a$ とすれば　$G(a) = F(a) + C$

$x = b$ とすれば　$F(b) = G(b) - C$

$\int_a^b f(t)\,dt =$

$= G(b) - (G(a) - \overset{0}{\underset{\shortparallel}{F(a)}})$ ← 定義

$= G(b) - G(a)$

I　　$I, p, q > 0$

$$g(x, y) = I - px - qy = 0$$

の下で

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}$$

を考える．停留点を求めよ．（λも求める）

II

(1) $\displaystyle\int_0^1 t^4\,dt$　　$(t^5)' = ?$　　$(t^5)' = 5t^4$

$\left(\frac{1}{5}t^5\right)' = t^4$

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{2t}\,dt$　　$(e^{2t})' = ?$

(3) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{1}{t}\,dt$　　$(\quad)' = \frac{1}{t}$

(4) $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{t}\,dt$　　$(t\sqrt{t})' = ?$

(5) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$　　$(\sqrt{t})' = ?$

(6) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{t+1}\,dt$　　$\left((t+1)^{\frac{3}{2}}\right)' = ?$

(7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$　　$\left(\frac{1}{x}\right)' = ?$