CalcNT19W
L10 12/11

(1

I $g(x,y)=x^2+\frac{y^2}{9}-1=0$ の下で $z=f(x,y)=x-y$

$$g_x=2x,\quad g_y=\frac{2}{9}y,\quad f_x=1,\quad f_y=-1$$

となる. (x,y) で極大(小) ならば

$$\begin{cases} 1+\lambda\cdot 2x=0 & (1)\\ -1+\lambda\cdot\frac{2y}{9}=0 & (2)\\ x^2+\frac{y^2}{9}-1=0 & (3)\end{cases}$$

を満たす $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在する. (1) において $\lambda=0$ とすると

$$1=0$$

となるので $\lambda\neq 0$ が分かる. よって

$$x=-\frac{1}{2\lambda},\quad y=\frac{9}{2\lambda}$$

と表わされる. (3) に代入すると

$$1=\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{81}{4\lambda^2}=\frac{1}{4\lambda^2}(1+9)=\frac{10}{4\lambda^2}$$

から

$$\frac{1}{2\lambda}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\quad 従って\quad \lambda=\pm\cancel{\frac{1}{2\sqrt{10}}}\ \frac{\sqrt{10}}{2}$$

であることが分かる. このとき

$$x=\mp\frac{1}{\sqrt{10}},\quad y=\pm\frac{9}{\sqrt{10}}$$

となる. 以上で停留点は

$$(x,y,\lambda)=\left(\mp\frac{1}{\sqrt{10}},\pm\frac{9}{\sqrt{10}},\pm\cancel{\frac{1}{2\sqrt{10}}}\right)\ (複号同順)$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2}$$

II $g(x, y) = x + 2y - 1 = 0$ の下で $z = f(x, y) = x^2 + 4y^2$

$g_x = 1,\ g_y = 2,\ f_x = 2x,\ f_y = 8y$

となる。(x, y) で極大（または極小）ならば

$$\begin{cases} 2x + \lambda \cdot 1 = 0 & (1) \\ 8y + \lambda \cdot 2 = 0 & (2) \\ x + 2y - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する。(1), (2) から

$$x = -\frac{\lambda}{2},\quad y = -\frac{1}{4}\lambda \qquad \cdots\cdots (4)$$

となるので (3) に代入して

$$0 = -\frac{\lambda}{2} - \frac{2}{4}\lambda - 1 = -\lambda - 1$$

従って $\lambda = -1$ となる。このとき (4) に代入して

$$x = \frac{1}{2},\quad y = \frac{1}{4}$$

となる。以上で

$$(x, y, \lambda) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -1\right)$$

が停留点であることが分かる。