

2019年12月11日微分積分演習問題

$I, p, q, I > 0$ とします. 効用関数

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で考えます. 停留点を求めて極大点であることを示しましょう.

解答 $g(x, y) = I - px - qy$ とすると

$$g_x = -p, \quad g_y = -q$$

$$u_x = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad u_y = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

となります. (x, y) で極大または極小ならば

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + \lambda(-p) = 0 & \dots\dots(i) \\ \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + \lambda(-q) = 0 & \dots\dots(ii) \\ I - px - qy = 0 & \dots\dots(iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します. $x, y > 0$ ですから (i) から $\lambda \neq 0$ が分かります. さらに (i) と (ii) から

$$\begin{cases} \lambda p = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \dots\dots(i)' \\ \lambda q = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & \dots\dots(ii)' \end{cases}$$

が従います. (i)'/(ii)' から

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} \quad \text{従って} \quad px = \frac{1}{2}qy$$

となります. (iii) に代入すると

$$I - \frac{1}{2}qy - qy = I - \frac{3}{2}qy = 0$$

が導かれ

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

となります. さらに (ii)' から

$$\lambda = \frac{1}{q} \left(\frac{I}{3p} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2I}{3q} \right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2q^2p} \right)^{\frac{1}{3}}$$

となります. 次に 2 階の条件を確認します.

$$g_{xx} = g_{xy} = g_{yx} = g_{yy} = 0$$

$$u_{xx} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad u_{xy} = u_{yx} = \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}, \quad u_{yy} = -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}$$

となります. このとき $L = f + \lambda g$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \\ -q & \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}q^2 + \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}pq + \frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}p^2 > 0 \end{aligned}$$

から停留点で極大であることが分かります。

II $p, q, I > 0$ とします。効用関数

$$u(x, y) = \frac{1}{3} \log x + \frac{2}{3} \log y$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で考えます。停留点を求めて極大点であることを示しましょう。

解答 $g(x, y) = I - px - qy$ とすると

$$g_x = -p, \quad g_y = -q$$

$$u_x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}, \quad u_y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{y}$$

となります。 (x, y) で極大または極大とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \lambda(-p) = 0 & \dots\dots (i) \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{y} + \lambda(-q) = 0 & \dots\dots (ii) \\ I - px - qy = 0 & \dots\dots (iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します。(i) において $\lambda = 0$ とすると $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} = 0$ となりますが、これを満たす x は存在しません。従って $\lambda \neq 0$ であることが分かります。(i)(ii) から

$$px = \frac{1}{3\lambda}, \quad qy = \frac{2}{3\lambda} \tag{iv}$$

が分かりますから、(iii) に代入して

$$I - \frac{1}{3\lambda} - \frac{2}{3\lambda} = I - \frac{1}{\lambda} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda = \frac{1}{I}$$

となります。これを (iv) に代入して

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

であることが分かります。

次に 2 階の条件を確認しましょう。

$$g_{xx} = g_{xy} = g_{yx} = g_{yy} = 0$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad u_{xy} = u_{yx} = 0, \quad u_{yy} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{y^2}$$

であることが分かります。これから

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} & 0 \\ -q & 0 & -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{y^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} q^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{y^2} p^2 > 0 \end{aligned}$$

から停留点で極大であることが分かります。

III 制約条件

$$x^2 + 2y^2 - 24 = 0$$

の下で

$$z = x + y$$

を考えます。停留点を求めて極大・極小を判定しましょう。

解答

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 24 = 0$$

の下で

$$z = f(x, y) = x + y$$

を考えます。

$$g_x = 2x, g_y = 4y, f_x = f_y = 1$$

と計算されますから、 (x, y) で極大・極小ならば

$$\begin{cases} 1 + \lambda \cdot 2x = 0 & \dots\dots (i) \\ 1 + \lambda \cdot 4y = 0 & \dots\dots (ii) \\ x^2 + 2y^2 - 24 = 0 & \dots\dots (iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します。(i) において $\lambda = 0$ とすると $1 = 0$ となりますから、 $\lambda \neq 0$ が必要であることが分かります。(i) と (ii) から

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{4\lambda} \tag{iv}$$

が従いますが、これを (iii) に代入すると

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 24$$

となりますから、 $\lambda = \pm\frac{1}{8}$ であることが分かります。(iv) に代入すると

$$x = \mp 4, \quad y = \mp 2$$

であることが分かります。以上で停留点は

$$(x, y, \lambda) = (\mp 4, \mp 2, \pm\frac{1}{8})$$

です。

つぎに 2 階の条件を確認しましょう。

$$g_{xx} = 2, g_{xy} = g_{yx} = 0, g_{yy} = 4$$

$$f_{xx} = f_{xy} = f_{yx} = f_{yy} = 0$$

であることが分かります。これから $L = f + \lambda g$ とおくと

$$B(x, y, \lambda) := \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 4y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 4y & 0 & 4\lambda \end{vmatrix} \\ = -32\lambda y^2 - 16\lambda x^2 = -16\lambda(x^2 + 2y^2) = -16 \cdot 24$$

が成立します。

(1) $(x, y, \lambda) = (-4, -2, \frac{1}{8})$ のとき

$$B = -48 < 0$$

から極小であることが分かります。

(2) $(x, y, \lambda) = (4, 2, -\frac{1}{8})$ のとき

$$B = 48 > 0$$

から極大であることが分かります。

IV 制約条件

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

の下で

$$z = f(x, y) = xy$$

を考えます。停留点を求めて極大・極小を判定しましょう。

解答

$$g_x = 2x, g_y = 2y, f_x = y, f_y = x$$

と計算されます。 (x, y) で極大または極小であるとする

$$\begin{cases} y + \lambda \cdot 2x = 0 & \dots\dots(i) \\ x + \lambda \cdot 2y = 0 & \dots\dots(ii) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & \dots\dots(iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します。(i) から $y = -2\lambda x$ となりますが、これを (ii) に代入すると

$$x(1 - 4\lambda^2) = 0$$

となります。 $x = 0$ とすると (i) から $y = 0$ となりますが、 $(x, y) = (0, 0)$ は (iii) を満たしません。よって $x \neq 0$ 従って

$$4\lambda^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

であることが分かります。

(1) $\lambda = \frac{1}{2}$ のとき (i) から $x = -y$ となりますから (iii) に代入して $(x, y) = (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2})$ であることが分かります。

(2) $\lambda = -\frac{1}{2}$ のとき (i) から $x = y$ となりますから (iii) に代入して $(x, y) = (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$ であることが分かります。

さらに 2 階の条件について考えます。

$$\begin{aligned} g_{xx} &= 2, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0, \quad g_{yy} = 2 \\ f_{xx} &= 0, \quad f_{xy} = f_{yx} = 1, \quad f_{yy} = 0 \end{aligned}$$

であることが分かります。これから $L = f + \lambda g$ とおくと

$$\begin{aligned} B(x, y, \lambda) &:= \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} \\ &= -8\lambda y^2 + 4xy - 8\lambda x^2 \\ &= 4xy - 8\lambda \end{aligned}$$

となります。

(1) $(x, y, \lambda) = (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ のとき

$$B = 4 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot \frac{1}{2} = -6 < 0$$

から極小であることが分かります。

(2) $(x, y, \lambda) = (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$ のとき

$$B = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 > 0$$

から極大であることが分かります。

$\mathbf{V} u(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ とします。制約条件

$$u(x, y) = \bar{u}$$

の下で $f(x, y) = px + qy$ を考えます。停留点を求めましょう。

解答 (x, y) で極大・極小であるとする

$$\begin{cases} p - \mu \cdot x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = 0 & \dots\dots(i) \\ q - \mu \cdot x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} = 0 & \dots\dots(ii) \\ x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - \bar{u} = 0 & \dots\dots(iii) \end{cases}$$

を満たす $\mu \in \mathbf{R}$ が存在します。(i) と (ii) から

$$\begin{cases} \mu \cdot x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = p & \dots\dots(i)' \\ \mu \cdot x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} = q & \dots\dots(ii)' \end{cases}$$

を得ます。(i)'/(ii)' から

$$\frac{y}{x} = \frac{p}{q}$$

となります。 $y = \frac{p}{q}x$ として (iii) に代入すると

$$\bar{u} = x^{\frac{1}{3}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

から

$$x = \left(\bar{u} \cdot \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}}$$

を得ます。また同様に

$$y = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{2}}$$

を得ます。このとき Lagrange 未定乗数は

$$\mu = 3\bar{u}^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}$$

となります。

注意 ここで得た

$$x^*(p, q, \bar{u}) = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad y^*(p, q, \bar{u}) = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{2}}$$

を **Hicks 型 (補償) 需要関数** と呼びます。

VI V によって得られた **Hicks 型 (補償) 需要関数** を

$$x^*(p, q, \bar{u}), \quad y^*(p, q, \bar{u})$$

とします。最小支出関数

$$E(p, q, \bar{u}) = px^*(p, q, \bar{u}) + qy^*(p, q, \bar{u})$$

と定めるとき、マッケンジーの補題

$$\frac{\partial E}{\partial p}(p, q, \bar{u}) = x^*(p, q, \bar{u})$$

$$\frac{\partial E}{\partial q}(p, q, \bar{u}) = y^*(p, q, \bar{u})$$

が成立することを示しましょう。

解答 最小支出関数は

$$\begin{aligned} E(p, q, \bar{u}) &= p \cdot \bar{U}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} + q \cdot \bar{U}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となります。これから

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = x^*(p, q, \bar{u})$$

$$\frac{\partial E}{\partial q} = \bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} = y^*(p, q, \bar{u})$$

VII VI に引続き、 $I - px - qy = 0$ の下で $u(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ を最大化して需要関数

$$x(p, q, I) = \frac{I}{2p}, \quad y(p, q, I) = \frac{I}{2q}, \quad (6)$$

を得たとします。間接効用関数を

$$v(p, q, I) = u(x(p, q, I), x(p, q, I)) \quad (7)$$

と定めるとき、以下が成立することを具体的に計算して示しましょう。

(1)

$$x^*(p, q, \bar{u}) = x(p, q, E(p, q, \bar{u})) \quad (8)$$

(2)

$$x(p, q, I) = x^*(p, q, v(p, q, I)) \quad (9)$$

(3)

$$v(p, q, E(p, q, \bar{u})) = \bar{u} \quad (10)$$

(4)

$$E(p, q, v(p, q, I)) = I \quad (11)$$

解答 (1)

$$x(p, q, E(p, q, \bar{u})) = \frac{E(p, q, \bar{u})}{2p} = \frac{2\bar{u}^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}{2p} = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = x^*(p, q, \bar{u})$$

(2)

$$v(p, q, I) = \left(\frac{I}{2p}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{I}{2q}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}$$

から

$$x^*(p, q, v(p, q, I)) = \left(\frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{I}{2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{I}{2p} = x(p, q, I)$$

(3)

$$v(p, q, E(p, q, \bar{u})) = \frac{\left(2\bar{u}^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}\bar{u}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}} = \bar{u}$$

(4)

$$E(p, q, v(p, q, I)) = 2v(p, q, I)^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} = 2\frac{I}{2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} = I$$

補足 スルツキー方程式 VIII を用いると

$$x^*(p, q, \bar{u}) = x(p, q, E(p, q, \bar{u}))$$

が成立することが分かります。この両辺を p, q で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^*}{\partial p} &= \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial p} \\ &= \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial I} \cdot x \\ \frac{\partial x^*}{\partial q} &= \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial q} \\ &= \frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial I} \cdot y\end{aligned}$$

を得ます。 $\frac{\partial y^*}{\partial p}, \frac{\partial y^*}{\partial q}$ も同様に計算すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial p} & \frac{\partial x^*}{\partial q} \\ \frac{\partial y^*}{\partial p} & \frac{\partial y^*}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial I} \\ \frac{\partial y}{\partial I} \end{pmatrix} (x \ y)$$

が従います。これをスルツキー方程式と呼びます。

VIII 曲線 $g(x, y) := x^2 - xy + y^2 - 1$ を $(1, 1)$ の近傍で解いた

$$y = \varphi(x) = \frac{x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$$

に対して $\varphi''(1)$ を g の 1 階および 2 階の偏微分係数を用いて求めましょう。

解答

$$\begin{aligned}g_x &= 2x - y, & g_y &= -x + 2y \\ g_{xx} &= 2, & g_{xy} &= g_{yx} = -1, & g_{yy} &= 2\end{aligned}$$

となる。これから

$$\begin{aligned}\varphi''(1) &= \frac{1}{g_y(1, 1)^3} \begin{vmatrix} 0 & g_x(1, 1) & g_y(1, 1) \\ g_x(1, 1) & g_{xx}(1, 1) & g_{xy}(1, 1) \\ g_y(1, 1) & g_{yx}(1, 1) & g_{yy}(1, 1) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -6\end{aligned}$$

であることが分かります。