II 関数 $z = xy(x+y-1)$ の停留点を求めましょう．

解答

$$z_x = 1 \cdot y(x+y-1) + xy \cdot 1 = y(2x+y-1)$$
$$z_y = 1 \cdot x(x+y-1) + xy \cdot 1 = x(x+2y-1)$$

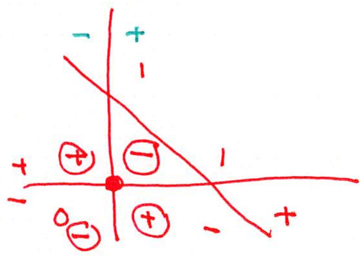
から

$$\begin{aligned} z_x = z_y = 0 &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ OR } 2x+y-1=0) \text{ AND } (x=0 \text{ OR } x+2y-1=0) \\ &\Leftrightarrow (x=y=0) \text{ OR } (y=0 \text{ AND } x+2y-1=0) \\ &\quad \text{ OR } (2x+y-1=0 \text{ AND } x=0) \text{ OR } (2x+y-1=0 \text{ AND } x+2y-1=0) \\ &= (x,y) = (0,0), (1,0), (0,1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

補足 さらに 2 階の偏導関数を

$$z_{xx} = y \cdot 2 = 2y$$
$$z_{xy} = 1 \cdot (2x+y-1) + y \cdot 1 = 2x+2y-1$$
$$z_{yy} = x \cdot 2 = 2x$$

と求めます．これを用いて停留点の極大・極小を判定します．



(i)$\underline{(x,y) = (0,0) \text{ のとき}}$

$$\det(H(f)(0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

から z は $(0,0)$ で極大でも極小でもないことが分かります．

(ii)$\underline{(x,y) = (1,0) \text{ のとき}}$

$$\det(H(f)(\overset{1}{\cancel{0}},0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

から z は $(1,0)$ で極大でも極小でもないことが分かります．

(iii)$\underline{(x,y) = (0,1) \text{ のとき}}$

$$\det(H(f)(0,\overset{1}{\cancel{0}})) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

から z は $(1,0)$ で極大でも極小でもないことが分かります．

(iv) ~~**(iii)**~~$\underline{(x,y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \text{ のとき}}$

$$z_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} > 0$$
$$\det(H(f)(0,0)) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} > 0$$

$= \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$

から z は $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ で極小であることが分かります．

L09 12月04日小テスト解答

II 関数 $z = xy(x+y-1)$ の停留点を求めましょう．

解答

$$
\begin{aligned}
z_x &= 1\cdot y(x+y-1) + xy\cdot 1 = y(2x+y-1)\\
z_y &= 1\cdot x(x+y-1) + xy\cdot 1 = x(x+2y-1)
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
z_x = z_y = 0 &\Leftrightarrow (y=0 \text{ OR } 2x+y-1=0) \text{ AND } (x=0 \text{ OR } x+2y-1=0)\\
&\Leftrightarrow (x=y=0) \text{ OR } (y=0 \text{ AND } x+2y-1=0)\\
&\qquad \text{OR } (2x+y-1=0 \text{ AND } x=0) \text{ OR } (2x+y-1=0 \text{ AND } x+2y-1=0)\\
&= (x,y) = (0,0),(1,0),(0,1),(\frac{1}{3},\frac{1}{3})
\end{aligned}
$$

補足 さらに 2 階の偏導関数を

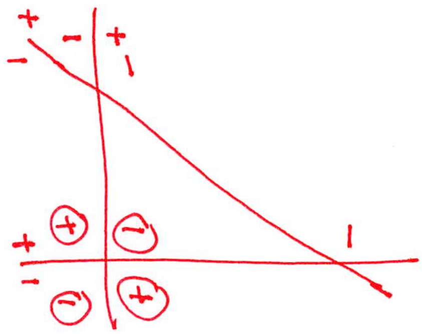
$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= y\cdot 2 = 2y\\
z_{xy} &= 1\cdot(2x+y-1) + y\cdot 1 = 2x+2y-1\\
z_{yy} &= x\cdot 2 = 2x
\end{aligned}
$$

と求めます．これを用いて停留点の極大・極小を判定します．

(i) $(x,y)=(0,0)$ のとき

$$\det(H(f)(0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

から z は $(0,0)$ で極大でも極小でもないことが分かります．



(ii) $(x,y)=(1,0)$ のとき

$$\det(H(f)(\overset{1}{\cancel{0}},0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

から z は $(1,0)$ で極大でも極小でもないことが分かります．

(iii) $(x,y)=(0,1)$ のとき

$$\det(H(f)(0,\overset{1}{\cancel{0}})) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

から z は $(1,0)$ で極大でも極小でもないことが分かります．

(iv) ~~**(iii)**~~ $(x,y)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ のとき

$$
\begin{aligned}
z_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) &= \frac{2}{3} > 0\\
\det(H(f)(0,0)) &= \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} > 0
\end{aligned}
$$

から z は $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ で極小であることが分かります．

$$= \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$a, b, c > 0$ のとき

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

$$\text{"}=\text{"} \iff a = b = c$$

$1-x-y,\ x,\ y > 0$ のとき.

$$\frac{1}{3} = \frac{(1-x-y)+x+y}{3} \geq \sqrt[3]{xy(1-x-y)}$$

$1-x-y,\ x,\ y > 0$ とする.

から

$$\frac{1}{3} \geq xy(1-x-y)$$

従って $xy(x+y-1) \geq -\frac{1}{3}$ となる. しかも

$$x = y = 1-x-y \iff x = y = \frac{1}{3}$$

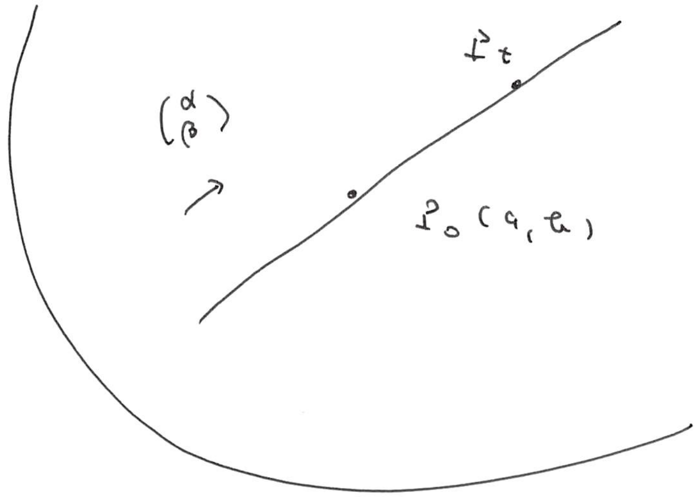
となるのが $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ で $xy(x+y-1)$ は最小値をとる.

$U \subset \mathbb{R}^2$ 開

$P_0(a, b) \in U$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$P_t(a+\alpha t, b+\beta t)$



$$F(t) = f(a+\alpha t,\ b+\beta t)$$

$$F'(t) = \alpha f(a+\alpha t,\ b+\beta t) + \beta f(a+\alpha t,\ b+\beta t)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_x(P_t) \\ f_y(P_t) \end{pmatrix} \right)$$

$$F''(t) = \left(H(f)(P_t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right)$$

方向微分

directional derivative

Chain Rule –その直観的な理解

戸瀬 信之

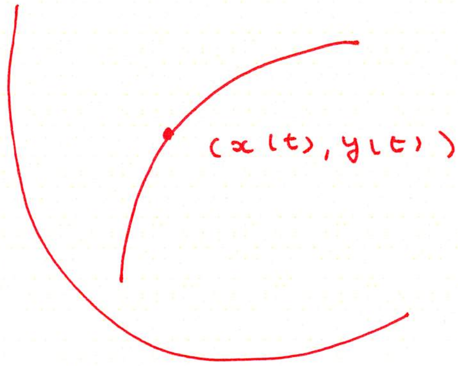
ITOSE PROJECT

2017 年 11 月

Chain Rule

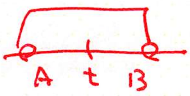
- $\mathbf{R}^2$ の開集合 U と U 上の C^1 級関数

$$f:\ U \longrightarrow \mathbf{R}$$



が与えられているとします.

- U 中の微分可能な曲線



$$(A, B) \longrightarrow U \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$があるとします.

- このとき 1 変数の関数 $F:\ (A, B) \to \mathbf{R}$ を

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

と定義できます.

Chain Rule(2)

定理

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

$x(t) = a + \alpha t,\ y(t) = b + \beta t.$ とおく.

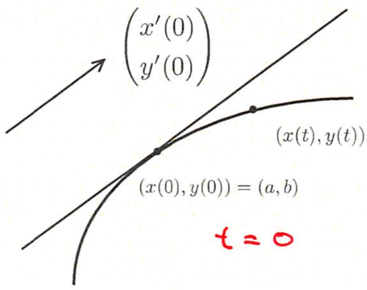
$$x'(t) = \alpha,\quad y'(t) = \beta$$

$$\rightarrow \quad F'(t) = \alpha f_x(x(t), y(t)) + \beta f_y(x(t), y(t))$$

パラメータ表示された曲線の接線方向 (1)

上で与えた曲線の $\mathbf{P_0(a, b)} = (\boldsymbol{x}(\mathbf{0}), \boldsymbol{y}(\mathbf{0}))$ における接線方向は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}'(\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{y}'(\mathbf{0}) \end{pmatrix}$$



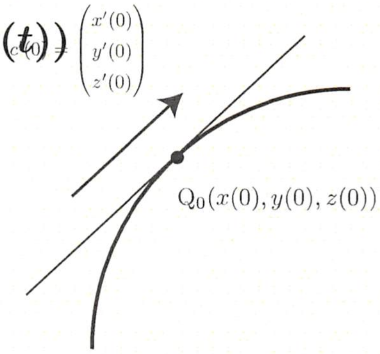
パラメータ表示された曲線の接線方向 (2)

3 次元空間中の曲線

$c: (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$

が与えられているとき c の $Q_0(x(0), y(0), z(0))$ における接線方向は

$$c'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix}$$



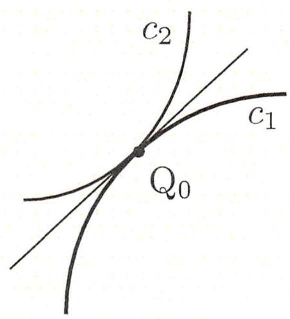
空間中の 2 曲線が接するとき

3 次元空間中の 2 曲線

$c_1: (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$

$c_2: (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$

が与えられていて点 $Q_0(a, b, c)$ が共有されているとします．すなわち



$$(a, b, c) = (x_1(t_1), y_1(t_1), z_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2), z_2(t_2))$$

がある $t_1, t_2 \in (A, B)$ に対して成立するとします．このとき

$$c_1 \text{ と } c_2 \text{ が } Q_0 \text{ で接する} \Leftrightarrow C_1'(t_1) \parallel C_2'(t_2)$$

$\begin{pmatrix} x_1'(t_1) \\ y_1'(t_1) \\ z_1'(t_1) \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} x_2'(t_2) \\ y_2'(t_2) \\ z_2'(t_2) \end{pmatrix}$

空間中の接する 2 曲線

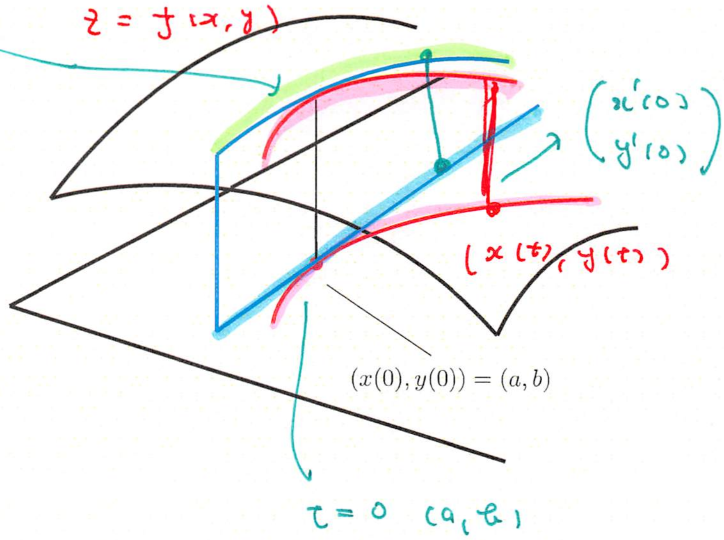
接している.

空間中には曲線　$f(x(t), y(t))$

$$\overset{\shortparallel}{}$$

$$(x(t), y(t), F(t))$$

があって，$x - y$ 平面の曲線
$(x(t), y(t))$ 上を動きます.
さらに別の曲線



$$\boxed{(a + x'(0)t, b + y'(0)t,} f(a + x'(0)t, b + y'(0)t))$$

が接線 $(a + x'(0)t, b + y'(0)t)$ の上を動きます.
2 曲線は $(a, b, f(a, b))$ で接します.

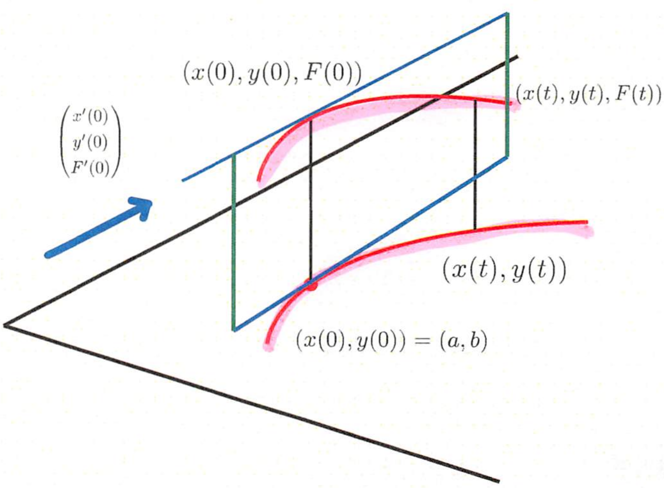
接線方向 (1)

曲線

$$(x(t), y(t), F(t))$$

の $(x(0), y(0), F(0))$ における
接線方向は

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ F'(0) \end{pmatrix}$$



接線方向 (2)

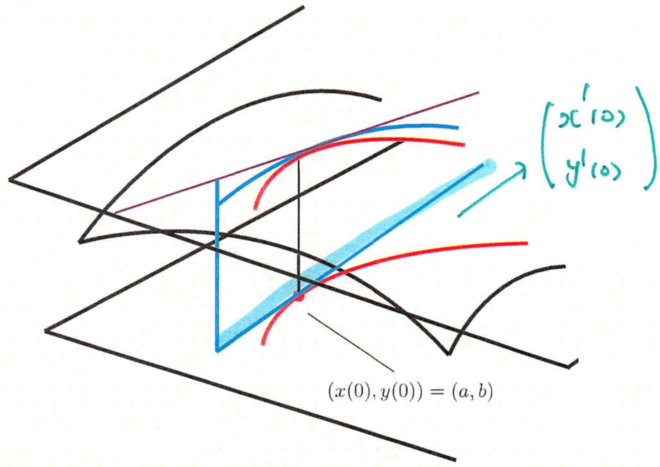
方向微分 $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'(0)\\ y'(0)\end{pmatrix}$

$$G(t) = f(a + x'(0)t, b + y'(0)t)$$

とするとき，曲線

$$(a + x'(0)t, b + y'(0)t, G(t))$$

の $t = 0$ の $(a, b, f(a, b))$ における接線方向は



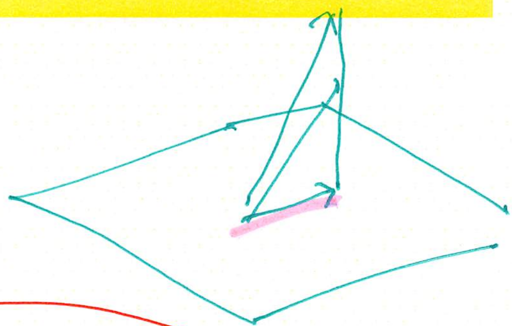
$$(x'(0), y'(0), \boxed{f_x(a, b)x'(0) + f_y(a, b)y'(0)})$$

これは方向微分にあたります．

$G'(0)$ = ← 方向微分

Chain Rule

- $(x(t), y(t), F(t))$ の接線方向



$$\begin{pmatrix}x'(0)\\ y'(0)\\ F'(0)\end{pmatrix}$$

と別の曲線 $(a + x'(0)t, b + y'(0)t, G(t))$ の接線方向

$$\begin{pmatrix}x'(0)\\ y'(0)\\ f_x(a, b)x'(0) + f_y(a, b)y'(0)\end{pmatrix}$$

は平行です．

// だから．

- 従って

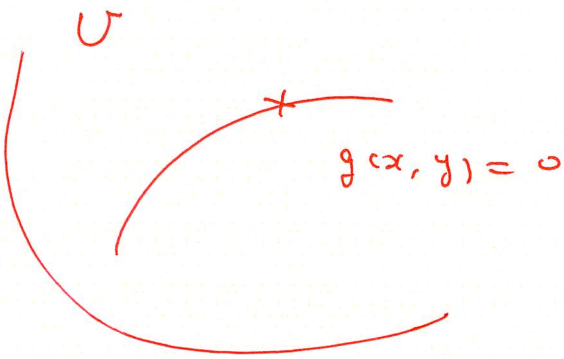
$$F'(0) = f_x(a, b)x'(0) + f_y(a, b)y'(0)$$

Lagrange の未定乗数法

戸瀬信之

November 29, 2017

制約条件付き極値問題



U を $\mathbf{R}^2$ の開集合とする．2 関数

$$f, g : U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとき

問題

$g(x, y) = 0$ の下で $z = f(x, y)$ を極大化（極小化）する

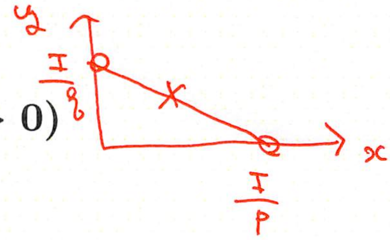
制約条件
Constraint

制約条件付き極値問題—例

例 1

$$g(x,y)=x^2+y^2-1=0 \quad \text{の下で} \quad z=f(x,y)=2x+y$$

例 2 $I,p,q>0$ とする．予算制約



$$g(x,y)=I-px-qy=0 \quad (x,y>0)$$

の下で効用関数

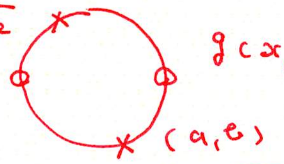
$$u(x,y)=\sqrt{xy}$$

を最大化する．この問題は第 1 財，第 2 財の価格が p,q のときに，予算 I をすべて支出して第 1 財を x，第 2 財を y 購入して効用を最大化するという問題である．

	①	②
購入量	x	y
単位量あたり価格	p	q

陰関数定理

$y=\sqrt{1-x^2}$

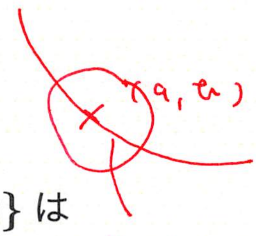


$y=-\sqrt{1-x^2}$

$g(x,y)=x^2+y^2-1=0$

$g_y=2y\neq 0$

定理



$$g(a,b)=0, \quad g_y(a,b)\neq 0$$

ならば，(a,b) の近くで $\{(x,y)\in U;\ g(x,y)=0\}$ は

$$y=\varphi(x)$$

と表すことができる．

陰関数定理—例

単位円

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

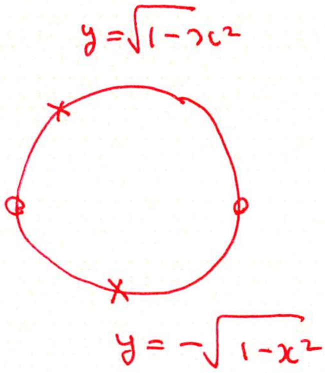
上の点 (a,b) において考える.

<u>$b>0$ のとき</u>

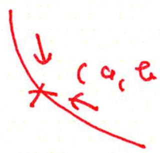
$$y = \sqrt{1-x^2}$$

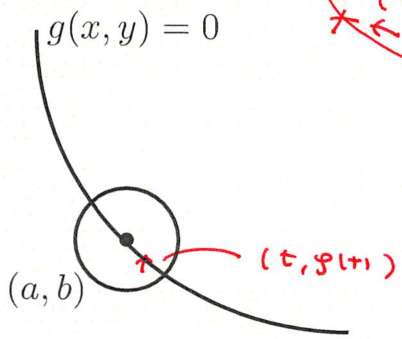
<u>$b<0$ のとき</u>

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$



解法





$$g(a,b) = 0, \quad g_y(a,b) \neq 0$$

を仮定して, 陰関数定理を適用する. (a,b) の近くで

$$y = \varphi(x)$$

と曲線 $g(x,y) = 0$ を表す.

(a,b) で極大（極小）ならば

$$F(t) = f(t, \varphi(t))$$

F(t) が t=a で 極大 (極小)

とすると $F'(a) = 0$ が従う.

解法 (3)

$f_x(a,b) + f_y(a,b)\cdot\varphi'(a) = 0$ に $\varphi'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$ を代入して

$$f_x(a,b) \boxed{-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}\cdot f_y(a,b)} = 0$$

を得ます．ここで Lagrange の未定乗数

CTでは
+

$$\lambda = -\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}$$

−

CTでは

を定めると

$$\begin{cases} f_x(a,b) + \lambda g_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) + \lambda g_y(a,b) = 0 \\ g(a,b) = 0 \end{cases} \qquad \text{(L)}$$

が導けます．

定理

定理

$g(a,b)=0,\ g_y(a,b)\neq 0$ を満たす $(a,b)\in U$ において制約条件付き極値問題が極大値（極小値）をとるとします．このとき (L) を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．

例

$g_x = 2x,\ g_y = 2y$ 　　　　$f_x = 2,\ f_y = 1$

問題 $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で $z = f(x,y) = 2x + y$

(x,y) で極大（極小）とすると

$$\boxed{\begin{cases} f_x(a,b) + \lambda g_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) + \lambda g_y(a,b) = 0 \end{cases}}$$

接線条件

$$\begin{cases} 2 + \lambda \cdot 2x = 0 & (i) \\ 1 + \lambda \cdot 2y = 0 & (ii) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．$\lambda = 0$ とすると (i) が $2 = 0$ となりますから，$\lambda \neq 0$ です．(i),(ii) から

$$x = -\frac{1}{\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda} \qquad \text{(iv)}$$

となりますが，これを (iii) に代入すると

例

$x = -\frac{1}{\lambda}$, $y = -\frac{1}{2\lambda}$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \quad \text{から} \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

となります．(iv) に代入して

$$x = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{（複号同順）}$$

解法 (2)

Chain Rule を使うと　$F(t) = f(t, \varphi(t))$

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

から　$\varphi(a) = b$　$t = a$ を代入

$$0 = F'(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b) \cdot \varphi'(a) \quad = ?$$

が分かります．さらに $g(t, \varphi(t)) \equiv 0$ の両辺を t で微分して

$$g_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0$$

$(t, \varphi(t))$

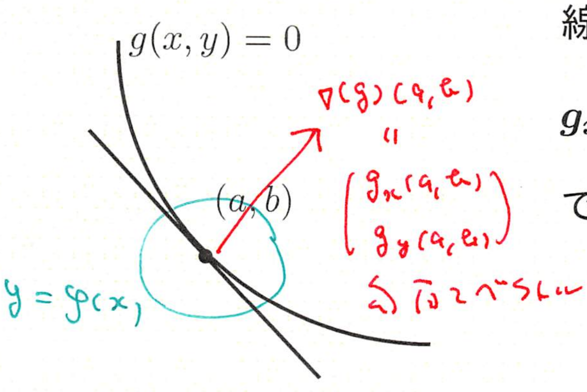
$g(x, y) = 0$

から　$t = a$ を代入

$$g_x(a, b) + \underbrace{g_y(a, b)}_{\neq 0 \text{ 仮定}} \cdot \varphi'(a) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boxed{\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}}$$

が分かります．

$\varphi'(a)$ の別の求め方



(a, b) における曲線 $g(x, y) = 0$ の接線は

$$g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b) = 0$$

$\neq 0$

であるが，$g_y(a, b) \neq 0$ から

$$y = \boxed{-\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}}(x - a) + b$$

となる．　傾き

接線の傾きを考えると

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$