CalcNT 19w
Lec 09
12/4

1°

$B : \overline{2\times 2} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2)$

$B\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 = \vec{0}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0}$ を 方程式

$B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0}$ の自明解

と呼ぶ

$|B| \neq 0$

$\Updownarrow$

$\left(B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0} \right)$ 自明解しかない

$|B| = 0$

$\Updownarrow$

$\exists \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0}$ 非自明解が存在

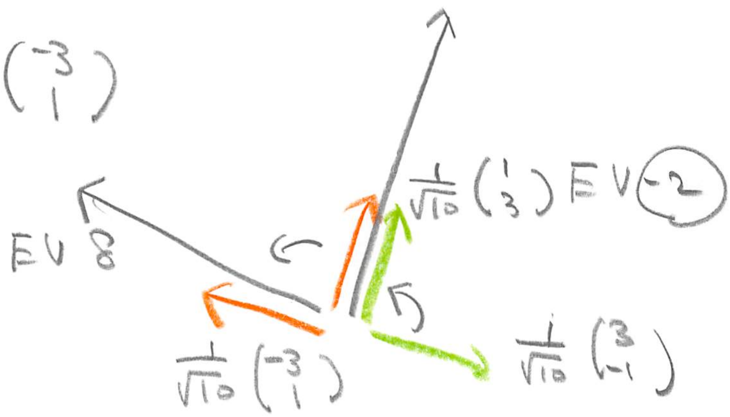
2° 回転行列

$$R = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$$

とすると

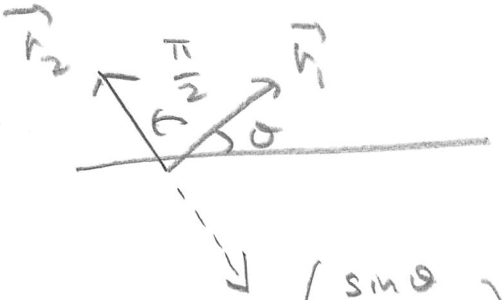
$$\boxed{\begin{gathered}\|\vec{r}_1\|^2 = \|\vec{r}_2\|^2 = 1\\ (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0\end{gathered}}$$

$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$



$\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-2 & \\ & 8\end{pmatrix}$

$\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}$

↑

これを選ぶと

回転行列にならない

3°

$$A(\vec{p}\ \vec{q}) = (A\vec{p}\ \ A\vec{q})$$

$$A(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) = (A\vec{p}\ \ A\vec{q}\ \ A\vec{r})$$

$$\vdots$$

$$(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{p} + y\vec{q}$$

$$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{r}$$

$$\vdots$$

③

${}^tA = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = A$　Aは対称.

$\lambda \neq -2, 8$

2019年11月27日小テスト解答

I $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう.

$(\lambda I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

解答 まず A の固有値を求めます.

$$\Phi_A(\lambda) = |\boxed{\lambda I_2 - A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 3 \\ 3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 7)(\lambda + 1) - 9 = (\lambda - 8)(\lambda + 2)$$

$(\lambda I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

から A の固有値は $\lambda = -2, 8$ であることが分かります．次に $\lambda = 8, -2$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます.

(i) $\lambda = 8$ のとき、

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　　$x + 3y = 0$

$A\vec{p}_1 = 8\vec{p}_1$

$$\cancel{B\vec{v} = 8\vec{v}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 3y = 0$$

$3x + 9y = 0$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

$y = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p}_1$

一般に成立.

となります.

(ii) $\lambda = -2$ のとき、

$-9x + 3y = 0$

$A\vec{p}_2 = -\vec{p}_2$

$$A\vec{v} = -2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x - y = 0$$

$3x - y = 0$　　$\perp$　A:対称.

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p}_2$

となります.

$= \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります．さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (8\vec{p}_1\ \ -2\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

R回転 ⇒ R正則

$AP = P\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

から $A = P\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます．ここで A が定める2次形式

$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$$7x^2 - 6xy - y^2 = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$P^{-1}AP = P^{-1}P\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
$= I_2\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

を考えましょう．P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます．このことを用いると

$$\left(A\binom{x}{y}, \binom{x}{y}\right) = \left(P^{-1}A\binom{x}{y}, P^{-1}\binom{x}{y}\right) = \left(P^{-1}A\boxed{P \cdot P^{-1}}\binom{x}{y}, P^{-1}\binom{x}{y}\right) = \left(\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}\binom{x}{y}, P^{-1}\binom{x}{y}\right)$$

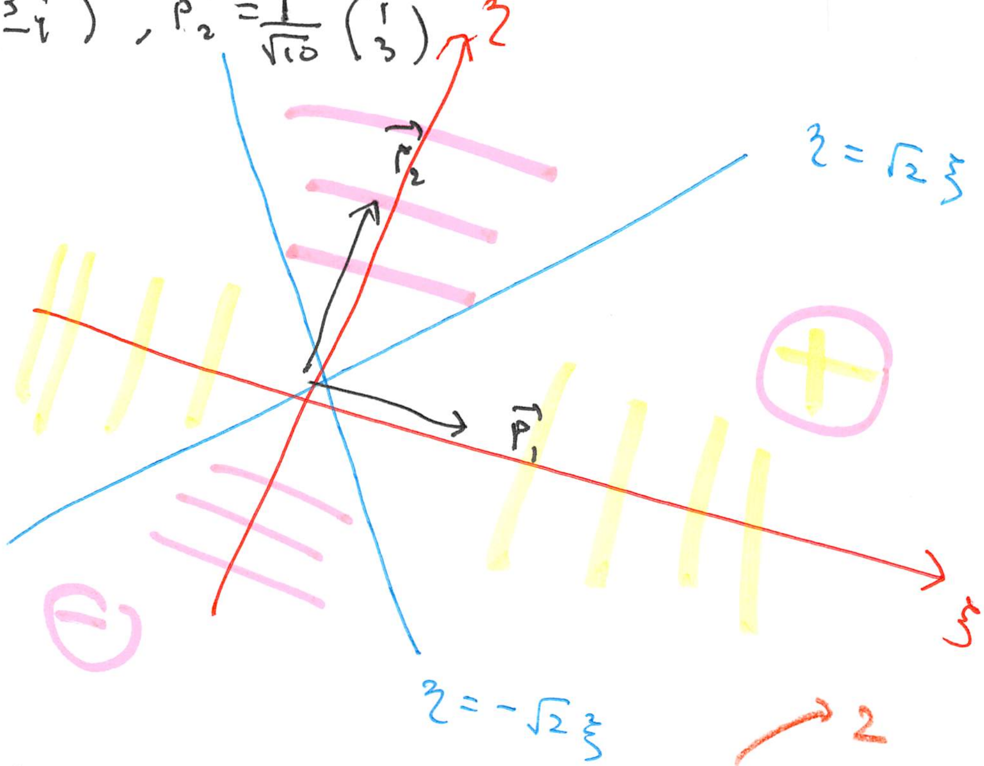
$= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\shortparallel$
I_2

が従います．さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\binom{x}{y} \quad \text{すなわち} \quad \binom{x}{y} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$



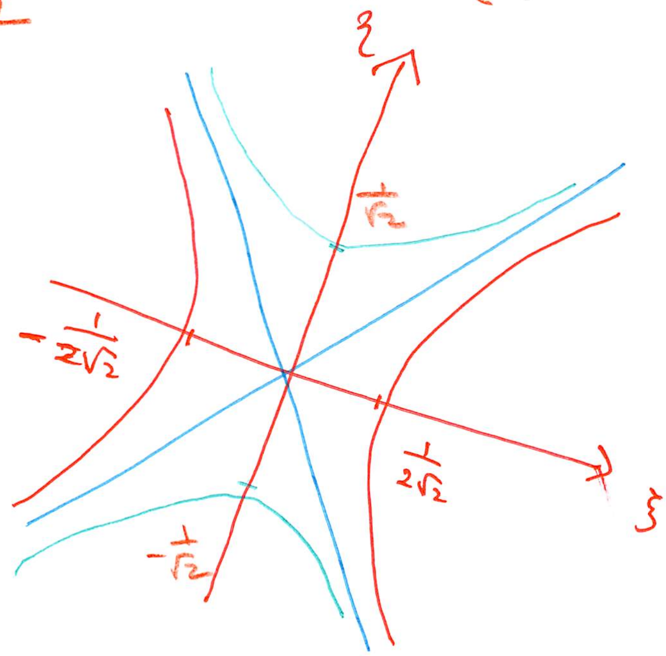
$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = 8\xi^2 - \underset{2}{\cancel{4}}\,\eta^2 = 0 \iff \eta = \pm\overset{\to 2}{\sqrt{2}}\,\xi .$

$\sim\sim\sim = 1$

$\Updownarrow \quad = -1$

$8\xi^2 - \underset{2}{4}\eta^2 = 1$

$= -1$



とすると

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\cancel{=2\xi^2+12\eta^2}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}8&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)=8\xi^2-2\eta^2$$

となります.

> **II** 関数 $z = xy(x+y-1)$ の停留点を求めましょう.

解答

$$z_x = 1\cdot y(x+y-1)+xy\cdot 1 = y(2x+y-1)$$
$$z_y = 1\cdot x(x+y-1)+xy\cdot 1 = y(x+2y-1)$$

x

から

$$\begin{aligned}z_x = z_y = 0 &\Leftrightarrow (y=0 \text{ OR } 2x+y-1=0)\ \text{ AND }\ (x=0 \text{ OR } x+2y-1=0)\\&\Leftrightarrow (x=y=0)\text{ OR }\ (y=0 \text{ AND } x+2y-1=0)\\&\qquad \text{OR }\ (2x+y-1=0 \text{ AND } x=0)\ \text{ OR }\ (2x+y-1=0 \text{ AND } x+2y-1=0)\\&= (x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

1

y

$3x+3y-2=0$

$x+y=\frac{2}{3}$

$$\boxed{xy=0 \iff x=0 \ \text{ OR } \ y=0}$$

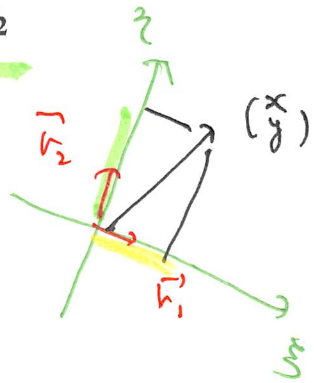
$P_1,\ P_2,\ Q$ $\qquad (P_1 \vee P_2)\wedge Q$

$$\equiv (P_1\wedge Q)\vee(P_2\wedge Q)$$

2 次形式の標準形 (No.2)

- 回転座標変換

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = R^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \xi\vec{r}_1 + \eta\vec{r}_2$$



-

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)$$
$$= \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

来週

2 次形式の正値性

- 2 次形式の正値性（負値性）

$A = \begin{pmatrix}a & c\\ c & d\end{pmatrix}$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \alpha, \beta > 0$$

$\Leftrightarrow$ $a > 0$ かつ $|A| > 0$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \alpha, \beta < 0$$

$\Leftrightarrow$ $a < 0$ かつ $|A| > 0$

- 正値性について（⇒） $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$ のとき

$$(A\vec{r}_1, \vec{r}_1) = (\alpha\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha \cdot \underbrace{\|\vec{r}_1\|^2}_{=1} = \alpha > 0$$

$$(A\vec{r}_2, \vec{r}_2) = (\beta\vec{r}_2, \vec{r}_2) = \beta \cdot \|\vec{r}_2\|^2 = \beta > 0$$

$A\vec{r}_1 = \alpha\vec{r}_1$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ 対行列. $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$

$\exists R$ 回転 $R^{-1} A R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \overset{\uparrow}{=} \left(R^{-1}AR \cdot R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

R^{-1}は回転

$$= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$

$$= \alpha \xi^2 + \beta \eta^2$$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \alpha$ β $\quad R = (\vec{r_1}\ \vec{r_2})$

$\Updownarrow$ $\quad \vee\ 0$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{r_1}$ $\vec{r_2}$ $\quad = \xi \vec{r_1} + \eta \vec{r_2}$

$\Leftarrow$ $\alpha, \beta > 0 \Rightarrow \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \alpha \xi^2 + \beta \eta^2 \geq 0$$

$= 0$

$\Updownarrow$

$\alpha \xi^2 = \beta \eta^2 = 0$

$\Updownarrow$

$\xi = \eta = 0$

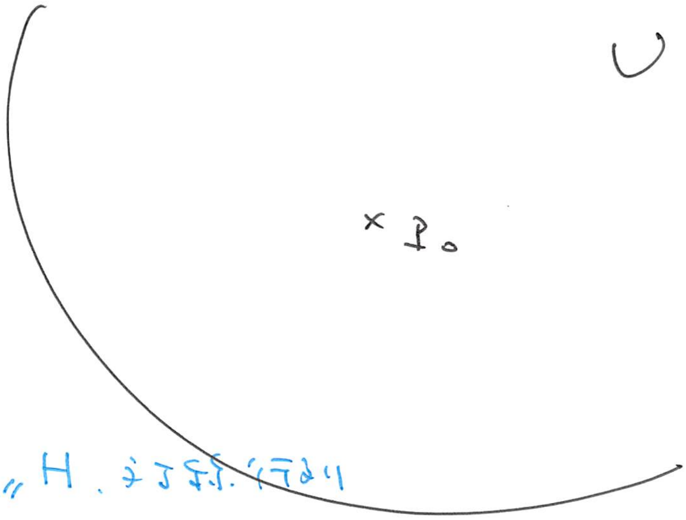
$\Updownarrow$

$x = y = 0$

$\boxed{p, q \geq 0 \text{ のとき } p + q = 0 \Rightarrow p = q = 0}$

$U \subset \mathbb{R}^2$ 開

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$



$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$

仮定

$\det H(f)(P_0) < 0$

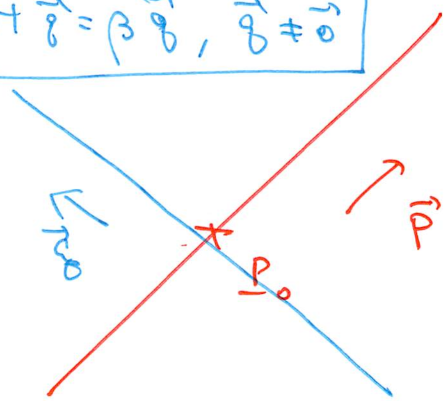
$$= \left| \boxed{\begin{matrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{matrix}} \right|$$

$= H$, 対称行列

固有値 α, β

$\alpha > 0,\ \beta < 0$ とする.

$H\vec{p} = \alpha \vec{p},\ \vec{p} \neq \vec{0}$ $\quad \boxed{H\vec{q} = \beta \vec{q},\ \vec{q} \neq \vec{0}}$



$F(t) = f(P_0 + t\vec{p})$

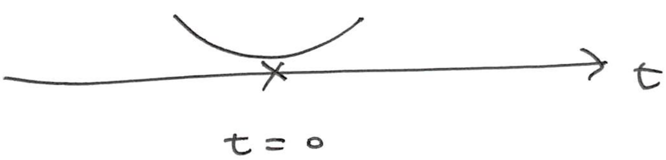
$$F'(t) = \left(\begin{pmatrix} f_x(P_t) \\ f_y(P_t) \end{pmatrix}, \vec{p} \right)$$

$$F''(t) = \left(H(f)(P_t)\vec{p}, \vec{p} \right)$$

$$F'(0) = \left(\begin{pmatrix} f_x(P_0) \\ f_y(P_0) \end{pmatrix}, \vec{p} \right) = (\vec{0}, \vec{p}) = 0$$

$$F''(0) = (H\vec{p}, \vec{p}) = (\alpha \vec{p}, \vec{p}) = \alpha \|\vec{p}\|^2 > 0$$

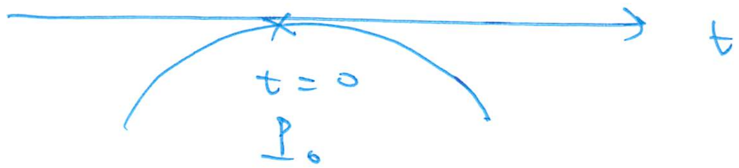
$\uparrow$ $\alpha > 0$



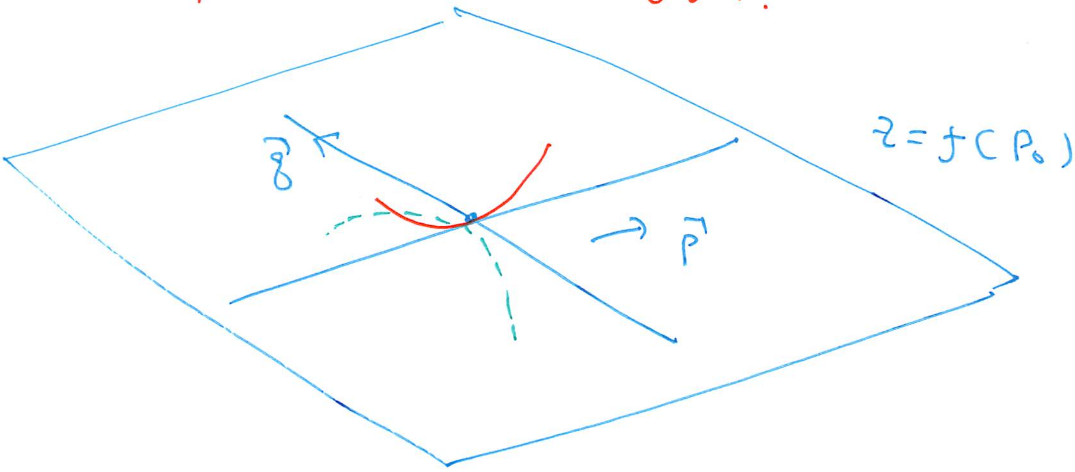
$$G(t) = f(P_0 + t\vec{q})$$

$$G'(0) = \cdots = (\vec{0}, \vec{q}) = 0$$

$$G''(0) = \cdots = (\beta\vec{q}, \vec{q}) = \beta \|\vec{q}\|^2 < 0$$



P_0 では極大でも極小でもない.



定理 $U \subset \mathbb{R}^2$ 開 $\quad f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P_0 \in U$

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$$

$\det(H(f)(P_0)) < 0$

$\Longrightarrow$ P_0 では極大でも極小でもない

$\det(\quad) > 0, \quad f_{xx}(P_0) > 0 \longrightarrow$ 極小.

$<$ 大.

④

${}^tA = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = A$ 対称行列．

2019 年 11 月 27 日小テスト解答

$\lambda \neq -2, 8$ のとき

I $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう．

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (\lambda I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Downarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

解答 まず A の固有値を求めます．

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 3 \\ 3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 7)(\lambda + 1) - 9 = (\lambda - 8)(\lambda + 2)$$

から A の固有値は $\lambda = -2, 8$ であることが分かります．次に $\lambda = 8, -2$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます．

(i) $\lambda = 8$ のとき、

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (8I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

$A\vec{p}_1 = 8\vec{p}_1$

$$\cancel{B\vec{v} = 8\vec{v}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 3y = 0$$

$x + 3y = 0$

$3x + 9y = 0$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

$y = -\frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \vec{p}_1$

となります．

(ii) $\lambda = -2$ のとき、

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (-2I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

$A\vec{p}_2 = -2\vec{p}_2$

$$\cancel{A\vec{v} = -2\vec{v}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x - y = 0$$

$-9x + 3y = 0$

$3x - y = 0$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$x = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \vec{p}_2$

となります．

一般に A に成立． ⊥ A 実対称． 直交 だから．

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります．さらに

$AP = P\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (8\vec{p}_1\ -2\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$= P\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $P^{-1}AP$ $= P^{-1}P\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

から $A = P\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます．ここで A が定める 2 次形式

$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$7x^2 - 6xy - y^2 =$

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

を考えましょう．P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます．このことを用いると

$$(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = (P^{-1}A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = (P^{-1}\underbrace{AP \cdot P^{-1}}_{I_2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)$$

が従います．さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

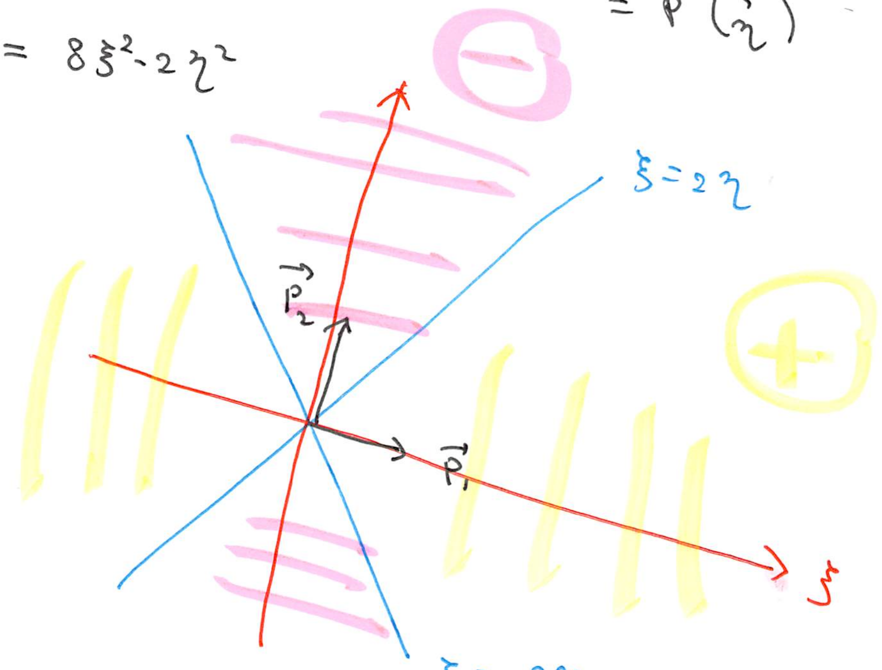
$= \left(\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$

$= 8\xi^2 - 2\eta^2$

$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1 + \eta \vec{p}_2 = P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$

$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = 8\xi^2 - 2\eta^2$



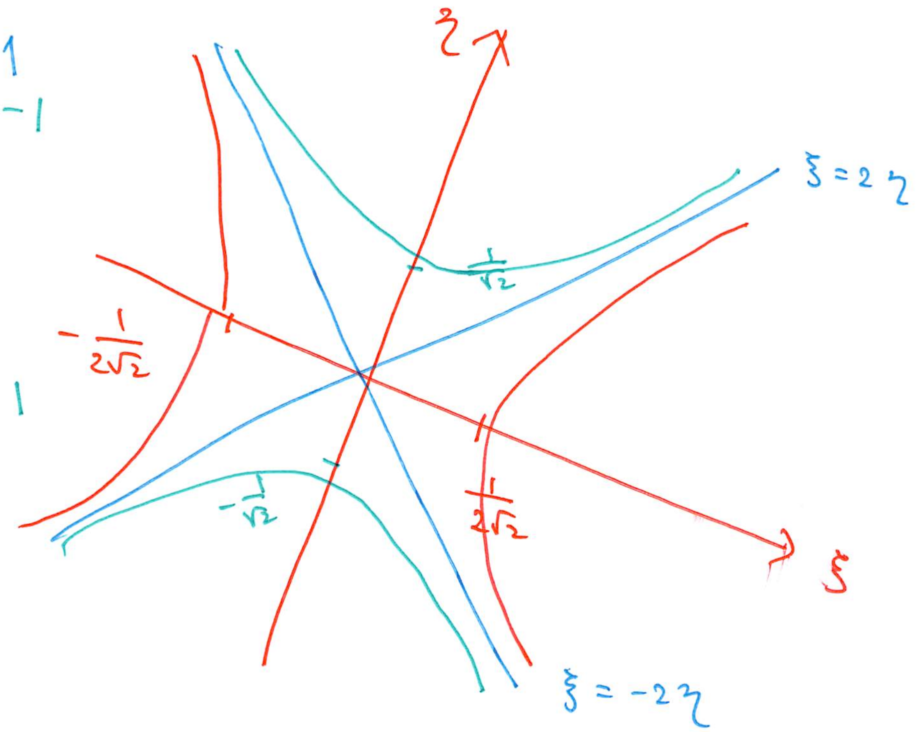
$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = 8\xi^2 - 2\eta^2 = 0 \iff \eta = \pm 2\xi$

$\sim\sim = 1$

$= -1$

$\eta = 0$ alors $8\xi^2 = 1$

$\xi = 0$ alors $2\eta^2 = 1$



とすると

$$(A\binom{x}{y}, \binom{x}{y}) = \cancel{2}\xi^2 \cancel{+12}\eta^2$$

8　−2　$(fg)' = f'g + fg'$

となります.

> **II** 関数 $z = xy(x+y-1)$ の停留点を求めましょう.

解答

$$z_x = 1 \cdot y(x+y-1) + xy \cdot 1 = y(2x+y-1)$$
$$z_y = 1 \cdot x(x+y-1) + xy \cdot 1 = y(x+2y-1)$$

x

から

$$\begin{aligned} z_x = z_y = 0 &\Leftrightarrow (y=0 \text{ OR } 2x+y-1=0) \text{ AND } (x=0 \text{ OR } x+2y-1=0) \\ &\Leftrightarrow (x=y=0) \text{ OR } (y=0 \text{ AND } x+2y-1=0) \\ &\quad \text{ OR } (2x+y-1=0 \text{ AND } x=0) \text{ OR } (2x+y-1=0 \text{ AND } x+2y-1=0) \\ &= (x,y) = (0,0),(1,0),(0,1),(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) \end{aligned}$$

1

$3x+3y=2$

$x+y=\frac{2}{3}$

$x, y \in \mathbb{C}$

$xy = 0 \iff x = 0 \text{ OR } y = 0$

P_1, P_2, Q 命題

$(P_1 \vee P_2) \wedge Q \equiv (P_1 \wedge Q) \vee (P_2 \wedge Q)$

$(P_1 \vee P_2) \wedge (Q_1 \vee Q_2) \equiv \cdots$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ 実対称. $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\exists R$ 回転 $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(R^{-1}AR \cdot R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$\uparrow$

R^{-1} 回転

従って内積を保つ.

$$= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \alpha \end{pmatrix}\right)$$

$$= \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

$\Rightarrow$ 仮 $\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right) \Longrightarrow \alpha, \beta > 0$

$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right.$ ならば

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{n}_1 \ \vec{n}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}_1 \neq \vec{0}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2

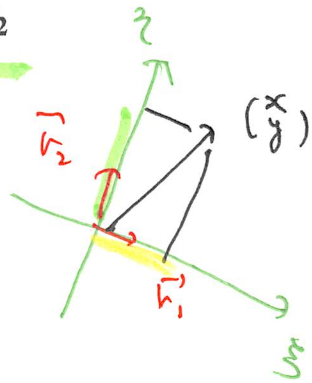
$0 < (A\vec{n}_1, \vec{n}_1) = \alpha.$

2 2 β

2次形式の標準形 (No.2)

- 回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad すなわち \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi\vec{r}_1 + \eta\vec{r}_2$$



-

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$
$$= \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

来週

2次形式の正値性

- 2次形式の正値性（負値性）

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & e \end{pmatrix}$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \alpha, \beta > 0$$

$\Leftrightarrow$ $a > 0$ かつ $|A| > 0$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \alpha, \beta < 0$$

$\Leftrightarrow$ $a < 0$ かつ $|A| > 0$

- 正値性について（⇒）$R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$ のとき

$$(A\vec{r}_1, \vec{r}_1) = (\alpha\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha \cdot \underbrace{\|\vec{r}_1\|^2}_{=1} = \alpha > 0$$

$$(A\vec{r}_2, \vec{r}_2) = (\beta\vec{r}_2, \vec{r}_2) = \beta \cdot \|\vec{r}_2\|^2 = \beta > 0$$

$A\vec{r}_1 = \alpha\vec{r}_1$

$(A\binom{x}{y}, \binom{x}{y}) > 0 \ (\binom{x}{y} \neq \vec{0})$

2次形式の正値性 (No.2)

- 正値性について（⇐） $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に注意。

仮定 $\alpha, \beta > 0$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow \binom{x}{y} = \vec{0}$

さらに

$$\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = 0 \;\rightarrow\; \alpha\xi^2 = \beta\eta^2 = 0$$
$$\rightarrow\; \xi = \eta = 0 \rightarrow x = y = 0$$

$\vee\!|\ 0 \quad \vee\!|\ 0$

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

$\binom{x}{y} = P\binom{\xi}{\eta}$

$\binom{x}{y} = P\binom{0}{0} = \vec{0}$

- N.B. $A, B \geq 0$ のとき

$$A + B = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$$

2次形式の正値性 (No.3)

- 正値性を A の係数で判定する

$$\alpha,\ \beta > 0 \Leftrightarrow a > 0,\ \det(A) = ab - c^2 > 0$$

$$\alpha,\ \beta < 0 \Leftrightarrow a < 0,\ \det(A) = ab - c^2 > 0$$

- （注意） $a + b = \alpha + \beta$ と $\alpha\beta = ab - c^2$
- （注意） $\alpha, \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$
- （正値性）(⇒)

$$ab - c^2 = \alpha\beta > 0 \;\rightarrow\; ab > 0$$
$$a + b = \alpha + \beta > 0 \;\rightarrow\; a + b > 0 \rightarrow a, b > 0$$

2次形式の正値性 (No.4)

- （正値性）($\Leftarrow$)

$$
\begin{aligned}
ab - c^2 > 0 &\ \rightarrow\ ab > 0 \\
a > 0, ab > 0 &\ \rightarrow\ b > 0 \\
&\quad\ \alpha + \beta = a + b > 0 \\
&\quad\ \alpha\beta = ab - c^2 > 0
\end{aligned}
$$

- 注意　$\det(A) = ab - c^2 < 0$ のとき $\alpha\beta < 0$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ 実対称

$|A| > 0,\ a > 0 \iff \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$

$<$ $\qquad$ $<$

$\iff \alpha, \beta > 0$

$<$

$a = 0$ のとき

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & c \\ c & b \end{vmatrix} = -c^2 \leq 0$

$|A| > 0$ のとき $a \neq 0$

$|A| = 0$ やめる.

$|A| < 0$ の場合.

$R^{-1} A R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\boxed{|A| = \alpha\beta < 0}$

$A, B : 2 \times 2$

$|AB| = |A| \cdot |B|$.

$|R^{-1} A R| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta$

$\quad\ \|$

$|R^{-1}| \cdot |A| \cdot |R| = \alpha\beta$ $\quad$ 1

$R^{-1} R = I_2$

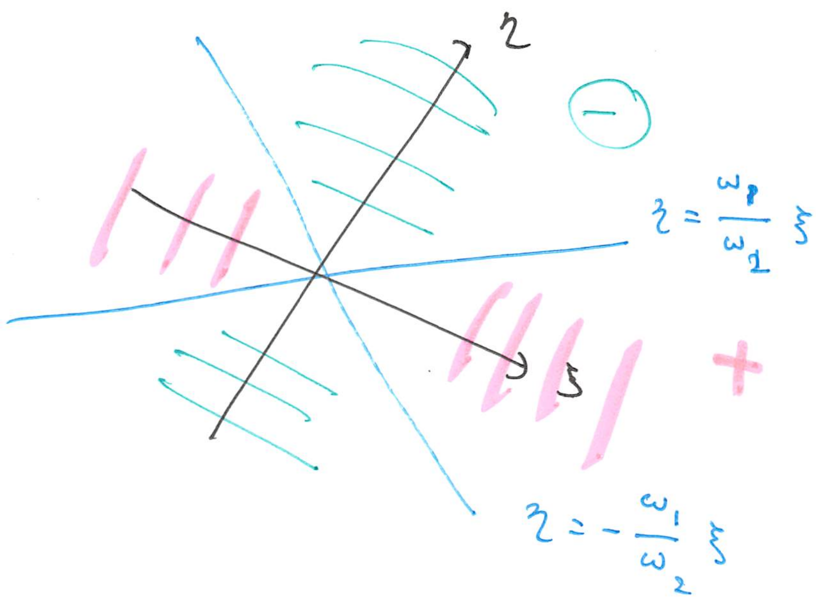
$|R^{-1}| \cdot |R| = |I_2| = 1$

$(\alpha > 0, \beta < 0)$ OR $(\alpha < 0, \beta > 0)$

$\alpha > 0, \beta < 0$ のとき

$\alpha = \omega_1^2, \quad \beta = -\omega_2^2$

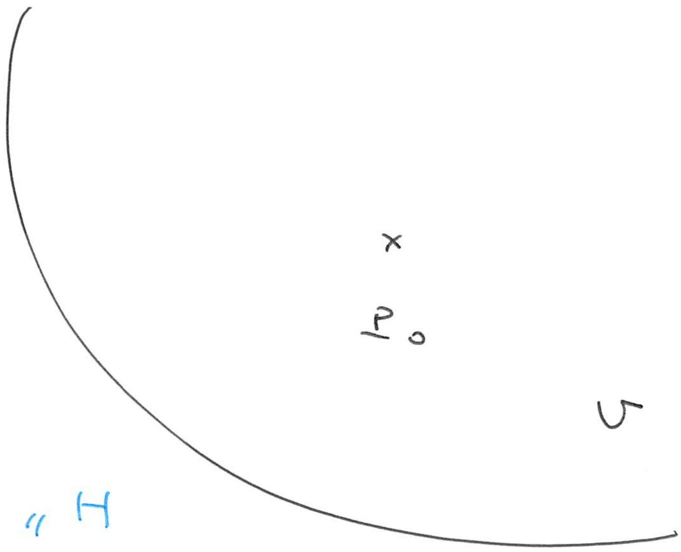
$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \alpha \xi^2 + \beta^2 \eta^2 = \omega_1^2 \xi^2 - \omega_2^2 \eta^2$$



$U \subset \mathbb{R}^2$ 開

$f : U \to \mathbb{R}$

$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$



仮定

$$\det\left(H(f)(P_0)\right) < 0$$

$$= \left| \boxed{\begin{matrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{matrix}} \right| \quad = H$$

by Young

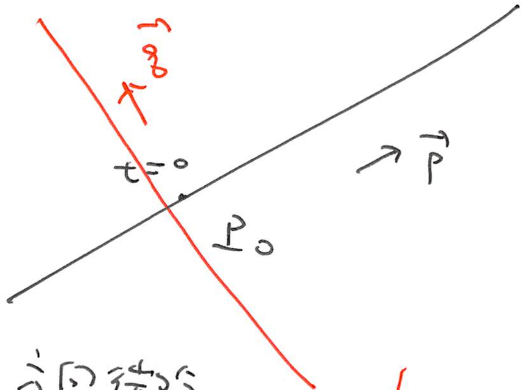
$\Longrightarrow$ f は P_0 で 極大でも極小でもない

$H\vec{p} = \alpha \vec{p}, \quad \vec{p} \neq 0$ $\qquad$ H の EV $\alpha > 0, \ \beta < 0$

$H\vec{q} = \beta \vec{q}, \quad \vec{q} \neq \vec{0}$

$F(t) = f(P_0 + t\vec{p})$

$G(t) = f(P_0 + t\vec{q})$



$$F'(t) = \left(\begin{pmatrix} f_x(P_t) \\ f_y(P_t) \end{pmatrix}, \vec{p} \right)$$

$$F''(t) = \left(H(f)(P_t)\vec{p}, \vec{p} \right)$$

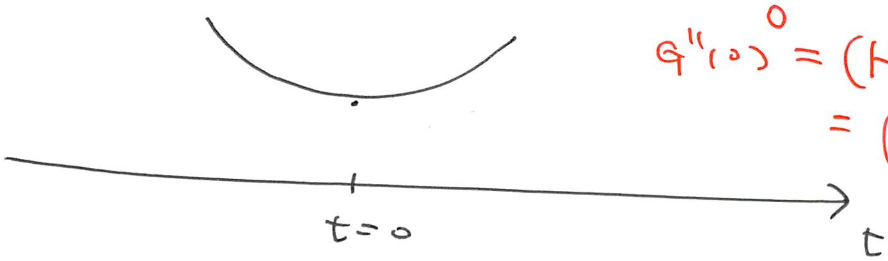
方向微分

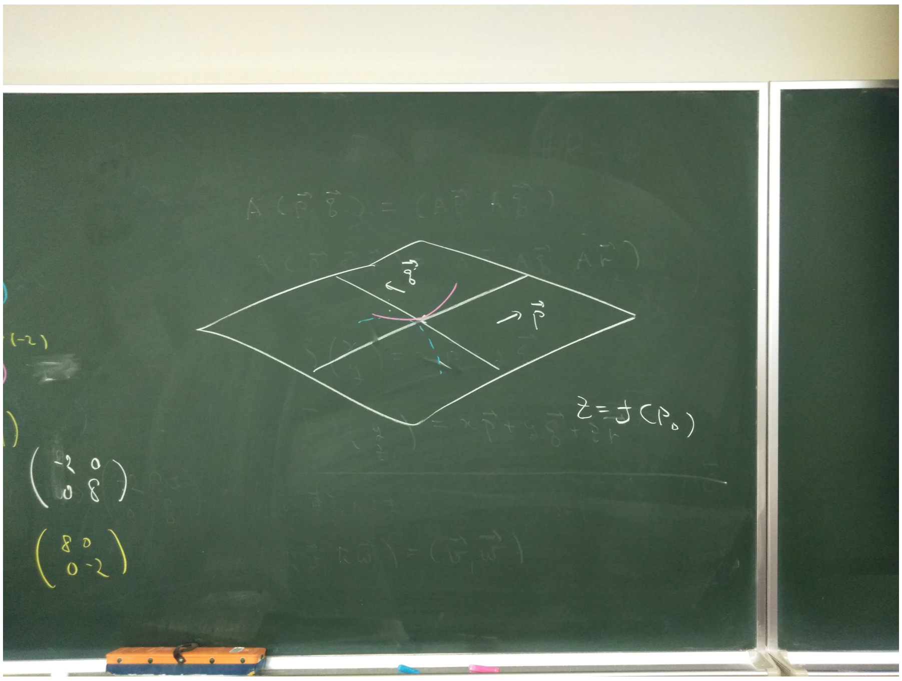
$$F'(0) = \left(\begin{pmatrix} f_x(P_0) \\ f_y(P_0) \end{pmatrix}, \vec{p} \right) = (\vec{0}, \vec{p}) = 0$$

$$G'(0) = \left(\begin{pmatrix} f_x(P_0) \\ f_y(P_0) \end{pmatrix}, \vec{q} \right) = (\vec{0}, \vec{q}) = 0$$

$$F''(0) = (H\vec{p}, \vec{p}) = (\alpha\vec{p}, \vec{p}) = \alpha \underbrace{\|\vec{p}\|^2}_{> 0} > 0$$

$$G''(0) = (H\vec{q}, \vec{q}) = \beta \|\vec{q}\|^2 < 0$$





z = f(P₀)

$z = xy(x+y-1)$

すべての停留点について極大(小)を判定する.

$\det(H(f)(P_0)) > 0$, $f_{xx}(P_0) > 0$ $\longrightarrow$ 極小.

$<$ 大.