2019 年 11 月 27 日小テスト解答

I $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう.

解答 まず A の固有値を求めます.

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 3 \\ 3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 7)(\lambda + 1) - 9 = (\lambda - 8)(\lambda + 2)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -2, 8$ であることが分かります. 次に $\lambda = 8, -2$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます.

(i) $\lambda = 8$ のとき、

$$B\vec{v} = 8\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 3y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります.

(ii) $\lambda = -2$ のとき、

$$A\vec{v} = -2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります.

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります. さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (8\vec{p}_1\ \ -2\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます. ここで A が定める 2 次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

を考えましょう. P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます. このことを用いると

$$(A \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = (P^{-1} A \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), P^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = (P^{-1}AP \cdot P^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), P^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), P^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \right)$$

が従います. さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1 + \eta \vec{p}_2$$

とすると
$$(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = 8\xi^2 - 2\eta^2$$
となります.

II 関数 $z = xy(x+y-1)$ の停留点を求めましょう．

解答

$$
\begin{aligned}
z_x &= 1 \cdot y(x+y-1) + xy \cdot 1 = y(2x+y-1) \\
z_y &= 1 \cdot x(x+y-1) + xy \cdot 1 = x(x+2y-1)
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
z_x = z_y = 0 &\Leftrightarrow (y=0 \text{ OR } 2x+y-1=0) \ \text{ AND } \ (x=0 \text{ OR } x+2y-1=0) \\
&\Leftrightarrow (x=y=0)\,\text{OR} \ (y=0 \text{ AND } x+2y-1=0) \\
&\quad\ \text{OR} \ (2x+y-1=0 \text{ AND } x=0) \ \text{ OR } \ (2x+y-1=0 \text{ AND } x+2y-1=0) \\
&= (x,y) = (0,0),(1,0),(0,1),(\frac{1}{3},\frac{1}{3})
\end{aligned}
$$

補足 さらに 2 階の偏導関数を

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= y \cdot 2 = 2y \\
z_{xy} &= 1 \cdot (2x+y-1) + y \cdot 1 = 2x+2y-1 \\
z_{yy} &= x \cdot 2 = 2x
\end{aligned}
$$

と求めます．これを用いて停留点の極大・極小を判定します．

(i)$\underline{(x,y)=(0,0) \text{ のとき}}$

$$
\det(H(f)(0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0
$$

から z は $(0,0)$ で極大でも極小でもないことが分かります．

(ii)$\underline{(x,y)=(1,0) \text{ のとき}}$

$$
\det(H(f)(0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0
$$

から z は $(1,0)$ で極大でも極小でもないことが分かります．

(iii)$\underline{(x,y)=(0,1) \text{ のとき}}$

$$
\det(H(f)(0,0)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0
$$

から z は $(1,0)$ で極大でも極小でもないことが分かります．

(iii)$\underline{(x,y)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \text{ のとき}}$

$$
\begin{aligned}
z_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) &= \frac{2}{3} > 0 \\
\det(H(f)(0,0)) &= \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} > 0
\end{aligned}
$$

から z は $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ で極小であることが分かります．