**2019 年 11 月 27 日演習問題解答**

**I 演習 7.1 (1)** $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

**II 演習 7.2** (7.8) について

$(\Rightarrow)$ は明らかです．$(\Leftarrow)$ は，$y = \vec{a}$ とすると

$$(\vec{a}, \vec{a}) = ||\vec{a}||^2 = 0$$

から $\vec{a} = \vec{0}$ が従うことから分かります．

(7.9) について $(\Rightarrow)$ は明らかです．$(\Leftarrow)$ は，$C = \vec{c}_1\ \vec{c}_2$ と列ベクトル表示をすると

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c}_1 = \vec{0}, \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c}_1 = \vec{0}$$

から $C = (\vec{0}\ \vec{0}) = O_2$ となることから分かります．

**III 演習 7.3** $P_1P_2$ について

$${}^t(P_1P_2)P_1P_2 = {}^tP_2{}^tP_1P_1P_2 = {}^tP_2I_2P_2 = {}^tP_2P_2 = I_2, \quad P_1P_2{}^t(P_1P_2) = P_1P_2{}^tP_2{}^tP_1 = P_1I_2{}^tP_1 = P_1{}^tP_1 = I_2$$

から $P_1P_2$ は直交行列になります．

${}^tP_1 = P_1^{-1}$ について

$${}^t({}^tP_1){}^tP_1 = P_1{}^tP_1 = I_2$$
$${}^tP_1{}^t({}^tP_1) = {}^tP_1P_1 = I_2$$

から ${}^tP_1$ が直交であることが分かります．

**IV 演習 7.4**

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

が成立しますから，正則行列の定義から $Q$ は正則となり，$Q^{-1} = Q$ が従います．

**V 演習 7.6** (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化しましょう。

(2) 制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で

$$z = \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

の最大値・最小値を求めましょう．

**解答 (1)** まず $A$ の固有値を求めます。

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - (-1)^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

から $A$ の固有値は $\lambda=-1,3$ であることが分かります。次に $\lambda=-1,3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

**(i)** $\lambda=3$ のとき、

$$A\vec{v}=3\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow x-y=0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad(x\neq0)$$

となります。

**(ii)** $\lambda=1$ のとき、

$$A\vec{v}=-\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow x+y=0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad(x\neq0)$$

となります。

ここで $\vec{p_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{p_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ により $P=(\vec{p_1}\ \vec{p_2})$ と定めると、$P$ は回転行列となります。さらに

$$AP=(A\vec{p_1}\ A\vec{p_2})=(3\vec{p_1}\ \vec{p_2})=(\vec{p_1}\ \vec{p_2})\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$$

から $A=P\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$ と $A$ は対角化できます。

**(2)** $A$ が定める 2 次形式を (1) で用いた回転座標変換を適用します。$P$ が回転行列ですから $P^{-1}$ も回転行列で

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)&=\left(P^{-1}A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\\&=\left(P^{-1}AP\cdot P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\\&=3\xi^2+\eta^2\end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

を用いました。

さらに制約条件は

$$\xi^2+\eta^2=1$$

となりますから，制約条件を用いて $\eta$ を消去すると

$$z=3\xi^2+\eta^2=3\xi^2+(1-\xi^2)=1+2\xi^2\geq1$$

となりますから，制約条件の下で $z\geq1$ であることが分かります。さらに最後の等号が $\xi=0$ 従って $\eta=\pm1$ のときに成立することから

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0\\\pm1\end{pmatrix}=\pm\vec{p_2}$$

において $z$ は最小値 1 を取ることが分かります．

他方，制約条件を用いて $\xi$ を消去すると

$$z = 3\xi^2 + \eta^2 = 3(1-\eta^2) + \eta^2 = 3 - 2\eta^2 \leq 3$$

となりますから，制約条件の下で $z \leq 3$ であることが分かります。さらに最後の等号が $\eta = 0$ 従って $\xi = \pm 1$ のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_1$$

において $z$ は最小値 3 を取ることが分かります．

**演習 7.8** 対称行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ が定める 2 次形式が正定値であるとします．このとき $A$ は正則で，$A^{-1}$ が対称となり，$A^{-1}$ が定める 2 次形式も正定値となることを示しましょう．

$A$ が定める 2 次形式が正定値ですから，

$$|A| > 0$$

が成立します．よって $A$ は正則であることが分かります．

$$AA^{-1} = I_2$$

の両辺の転置をとると

$$^t\left(A^{-1}\right) {}^tA = {}^t\left(A^{-1}\right) A = I_2$$

が成立します．この両変に右から $A^{-1}$ を掛けると

$$^t\left(A^{-1}\right) = A^{-1}$$

が従いますから，$A^{-1}$ が対称であることが分かります．$A$ の固有値 $\alpha, \beta$ は

$$\alpha, \beta > 0$$

となります．このとき回転行列 $R$ が存在して

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成立します．この両辺の逆行列をとると

$$R^{-1}A^{-1}R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

を得ます．

$$\Phi_{A^{-1}}(\lambda) = \Phi_{R^{-1}A^{-1}R} = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{\beta} \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{\alpha})(\lambda - \frac{1}{\beta})$$

から $A^{-1}$ の固有値が $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} > 0$ と正となります．よって対称な $A^{-1}$ が定める 2 次形式は正定値となります．

**VI** (MSF2018 第 4 章 II) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してその転置行列を ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ によって定義します．$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{w}) &= (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}, \vec{w}) = x(\vec{\alpha}, \vec{w}) + y(\vec{\beta}, \vec{w}) \\ &= \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

となる．他方

$${}^tA\vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha} \\ {}^t\vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha}\vec{w} \\ {}^t\vec{\beta}\vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix}$$

から

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{w} \right) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が従います．

**VIII** $A = \begin{pmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{pmatrix}$ に対して

$$\left( A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) > 0 \quad \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

を満たす $c \in \mathbf{R}$ をすべて求めましょう．

解答　求める条件は

$$5 - c > 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{vmatrix} > 0$$

となります．

$$\begin{vmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{vmatrix} = (5-c)(2-c) - 2^2 = (c-1)(c-6) > 0 \quad \Leftrightarrow c < 1, c > 6$$

なので，求める条件は

$$c < 1$$

であることが分かります．