## 2019 年 11 月 06 日微分積分小テスト解答

**問題** $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう.

B：対称

${}^tB = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = B$

**解答** まず $B$ の固有値を求めます。

$$\Phi_B(\lambda) = |\lambda I_2 - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 6)(\lambda - 3) - (-2)^2 = (\lambda - 2)(\lambda - 7)$$

λ≠2, 7 のとき、

$(\lambda I_2 - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

⇓

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

から $B$ の固有値は $\lambda = 2, 7$ であることが分かります。次に $\lambda = 2, 7$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

$(\lambda I_2 - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

**(i)** $\lambda = 2$ のとき、

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

$-4x - 2y = 0$

$-2x - y = 0$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき $\vec{p_1}$

となります。

一般論を考える

**(ii)** $\lambda = 7$ のとき、

$x - 2y = 0$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

$-2x + 4y = 0$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

$y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき $\vec{p_2}$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ と定めると、$P$ は回転行列となります。さらに

$$BP = (B\vec{p}_1\ B\vec{p}_2) = (2\vec{p}_1\ 7\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

P は回転だから正則

から $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ と $B$ は対角化できます。

$P^{-1}BP = P^{-1}P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

$= I_2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

**補足** さらに $P$ が回転行列ですから $P^{-1}$ も回転行列で

$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(P^{-1}B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left(P^{-1}B\underbrace{P \cdot P^{-1}}_{= I_2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$
$$= 2\xi^2 + 7\eta^2$$

$\| \quad 6x^2 + 4xy + 3y^2$

となります。ここで回転座標変換 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いました。

$R_\theta$ は内積を保つ (preserve)

$\left(R_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R_\theta\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_\theta \cdot R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$$

$$R_\theta \cdot R_{-\theta} = R_{-\theta} \cdot R_\theta = R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$R_\theta$ は正則

$$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos\theta(-\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= {}^tR_\theta.$$

$C$：$2\times 2$のとき

$$|C| \neq 0 \iff \left( C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$

$$|C| = 0 \iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ に対して } C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

回転行列

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$R_\theta \cdot R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$$

から

$$R_\theta \cdot R_{-\theta} = R_{-\theta} \cdot R_\theta = R_0 = I_2$$

従って　$R_\theta$ は正則で

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\cos\theta \quad \sin\theta} \\ \boxed{-\sin\theta \quad \cos\theta} \end{pmatrix} = {}^tR_\theta$$

${}^tR_\theta R_\theta = R_\theta^{-1} R_\theta = I_2$ が成立する.

---

$$A(\vec{p}\ \vec{q}) = (A\vec{p}\ \ A\vec{q})$$

$$A(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) = (A\vec{p}\ \ A\vec{q}\ \ A\vec{r})$$

$$\vdots$$

$$(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{p} + y\vec{q}$$

$$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{r}$$

---

$A$ : 2×2 [illegible] $\quad A = \begin{pmatrix} a|_1 \\ a|_2 \end{pmatrix}$ , $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a|_1 \\ a|_2 \end{pmatrix}\vec{v} = \begin{pmatrix} a|_1\ \vec{v} \\ a|_2\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

**2019 年 11 月 06 日微分積分小テスト解答**

問題 $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう．　対称。　${}^tB = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = B$

**解答** まず $B$ の固有値を求めます。

$$\Phi_B(\lambda) = |\lambda I_2 - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 6)(\lambda - 3) - (-2)^2 = (\lambda - 2)(\lambda - 7)$$

$\lambda \neq 2, 7$

$(\lambda I_2 - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

から $B$ の固有値は $\lambda = 2, 7$ であることが分かります。次に $\lambda = 2, 7$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

$(\lambda I_2 - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

**(i)** $\lambda = 2$ のとき、

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

$-4x - 2y = 0$

$-2x - y = 0$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (x \neq 0)$$

$\vec{p}_1$ は $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

となります。　$\to B\vec{p}_1 = 2\vec{p}_1$

**(ii)** $\lambda = 7$ のとき、

$x - 2y = 0$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

$-2x + 4y = 0$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

$\vec{p}_2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{5}}$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ と定めると、$P$ は回転行列となります。さらに

$$BP = (B\vec{p}_1\ B\vec{p}_2) = (2\vec{p}_1\ 7\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

から $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ と $B$ は対角化できます。

$P^{-1}BP = P^{-1}P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

**補足** さらに $P$ が回転行列ですから $P^{-1}$ も回転行列で

$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(P^{-1}B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left(P^{-1}BP \cdot P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$
$$= 2\xi^2 + 7\eta^2$$

$= 6x^2 + 4xy + 3y^2$

となります。ここで回転座標変換 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いました。

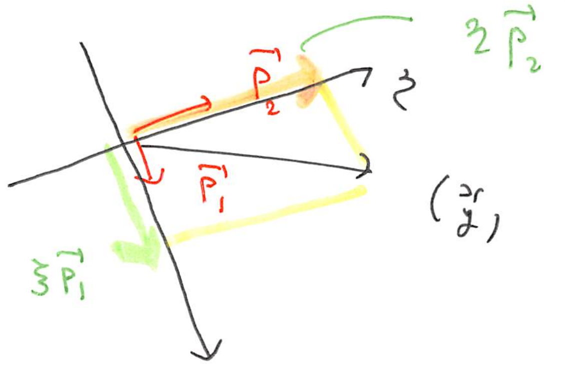


$\left(R_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R_\theta\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$= \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$



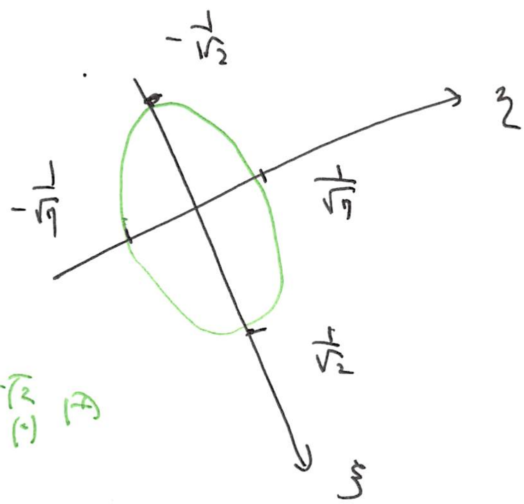

$$6x^2 + 4xy + 3y^2$$

$$\left(B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = 2\xi^2 + 7\eta^2 = 1 \text{ とする.}$$

$\eta = 0$ $\quad \xi^2 = \frac{1}{2}$

のとき

$\xi = 0$ $\quad \eta^2 = \frac{1}{7}$




楕円

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = c$$

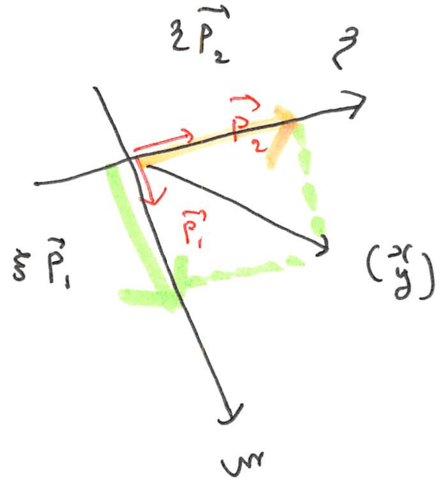
$c > 0$ 楕円

$c = 0$ 原点

$c < 0$ 空集合

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$= \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

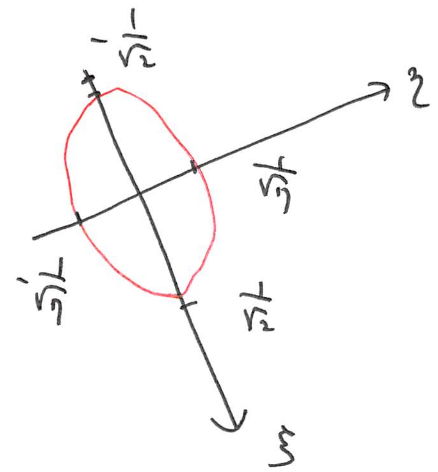



$6x^2+4xy+3y^2 = 2\xi^2+7\eta^2 = 1$ のとき.

$\eta = 0$ のとき $\rightarrow 2\xi^2 = 1$

$\xi = 0$ のとき $\rightarrow 7\eta^2 = 1$

楕円.




$6x^2+4xy+3y^2 = 2\xi^2+7\eta^2 = C$

$C > 0$ 楕円

$C = 0$ $\xi = \eta = 0 \leftrightarrow x = y = 0$

$C < 0$ 空集合

$2\xi^2+7\eta^2 = -1$

$p, q \geq 0$ のとき

$p + q = 0$

$\Rightarrow p = q = 0$

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = \vec{0}$

# 2次の実対称行列の対角化

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2017年11月 at HC



## 2次実対称行列の固有方程式

- 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ の固有多項式

$^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = A$

A が対称.

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2 \end{aligned}$$

$-$

$+$

- 2次方程式 $\Phi_A(\lambda) = 0$ の判別式 (discriminant)

$$D = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0$$



$\boxed{\begin{array}{l} p, q \geq 0 \text{ のとき} \\ p + q = 0 \Rightarrow p = q = 0 \end{array}}$

$a = b$ かつ $c = 0$

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2$

## 2 次実対称行列の固有方程式 (No. 2)

- 定理　2 次実対称行列の固有値は実数である。
- 注意　$D = 0$ のとき

$$a = b,\ c = 0 \quad 従って \quad A = aI_2$$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

- 以下 $D > 0$ とする。$\Phi_A(\lambda) = 0$ の 2 解を $\alpha$ と $\beta$ として

$$\alpha \neq \beta$$

- このとき

$$\alpha + \beta = a + b, \quad \alpha\beta = ab - c^2 = \det(A)$$



$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2$

$= \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta.$

## $\alpha \neq \beta$ のときの固有ベクトル（準備）

$= (\vec{b}_1\ \vec{b}_2)$　　${}^tB = \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1 \\ {}^t\vec{b}_2 \end{pmatrix}$　$2\times 2.$

- 定理　$B \in M_2(\mathbf{R})$ とする。このとき $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$2\times 2$

$$(B\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tB\vec{y})$$

${}^tB\vec{y} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1 \\ {}^t\vec{b}_2 \end{pmatrix} \vec{y} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1\vec{y} \\ {}^t\vec{b}_2\vec{y} \end{pmatrix}$

$\in \mathbb{R}^2$

- （証明）

$$\begin{aligned}(B\vec{x}, \vec{y}) &= (\underbrace{\boxed{x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2}}_{=B\vec{x}}, \vec{y}) = x_1(\vec{b}_1, \vec{y}) + x_2(\vec{b}_2, \vec{y}) \\ &= x_1{}^t\vec{b}_1\vec{y} + x_2{}^t\vec{b}_2\vec{y} = \left(\vec{x}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1\vec{y} \\ {}^t\vec{b}_2\vec{y} \end{pmatrix}\right) = (\vec{x}, {}^tB\vec{y})\end{aligned}$$

${}^t\vec{a}\,\vec{b} = (a_1, a_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$= a_1b_1 + a_2b_2$

$= (\vec{a}, \vec{b})$

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$　$n \geq 2$

$\boxed{{}^t\vec{a}\,\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \vec{v} \\ a_2 \vec{v} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \vec{v} \\ a_2 \vec{v} \\ a_3 \vec{v} \end{pmatrix}$$

## $\alpha \neq \beta$ のときの固有ベクトル

A:対称

- 定理　$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$、$A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$ ならば

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

$// \quad (\vec{p}_1, {}^tA\vec{p}_2)$　　${}^tA = A.$

- （証明）${}^tA = A$ だから $(A\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_1, A\vec{p}_2)$

$$(A\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\alpha\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

$$(\vec{p}_1, A\vec{p}_2) = (\vec{p}_1, \beta\vec{p}_2) = \beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

$$\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \to (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

$$\underbrace{(\alpha - \beta)}_{\neq 0}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$



$D = 0$ のとき $A = aI_2$ だから自明.

$D \neq 0 \to \alpha \neq \beta$ を考える.

## 実対称行列は回転行列で対角化可能

- $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$、$A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$、$\vec{p}_i \neq \vec{0} (i = 1, 2)$ とする。

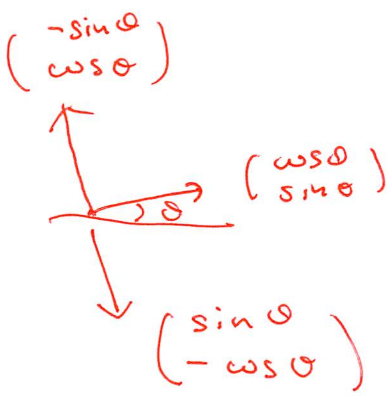
$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{p}_1\|}\vec{p}_1, \quad \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{p}_2\|}\vec{p}_2$$

とすると

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0, \ \|\vec{q}_1\| = \|\vec{q}_2\| = 1$$

- $\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とするとき

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$






$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$R = (\vec{q}_1 \ \vec{q}_2)$　　$R = (\vec{q}_1 \ -\vec{q}_2)$ 回転,

$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (\alpha\vec{r}_1 \ \beta\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

## 実対称行列は回転行列で対角化可能 (No.2)

- $(\vec{q}_1\ \vec{q}_2)$ または $(\vec{q}_1\ \ -\vec{q}_2)$ は回転行列である。
- 定理　**2** 次対称行列 $A$ は回転行列で対角化可能である。すなわち、回転行列 $R$ が存在して

$$AR = R\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$



## 2 次形式の標準形

- **2** 次正方行列 $A = \begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}$ が定める **2** 次形式

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

- $R^{-1}$ が回転行列で、内積を保つから

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) &= \left(R^{-1}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\\ &= \left(R^{-1}A\underbrace{R\cdot R^{-1}}_{= I_2}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

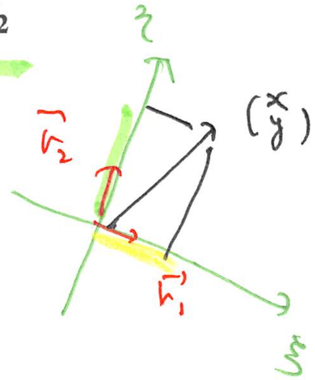


$$= \left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

## 2次形式の標準形 (No.2)

- 回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2$$



- 

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right)$$
$$= \alpha \xi^2 + \beta \eta^2$$



来週．

## 2次形式の正値性

- 2次形式の正値性（負値性）

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \alpha, \beta > 0$$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \alpha, \beta < 0$$

- 正値性について（$\Rightarrow$）$R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$ のとき

$$(A\vec{r}_1, \vec{r}_1) = (\alpha \vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha \cdot \|\vec{r}_1\|^2 = \alpha > 0$$

$$(A\vec{r}_2, \vec{r}_2) = (\beta \vec{r}_2, \vec{r}_2) = \beta \cdot \|\vec{r}_2\|^2 = \beta > 0$$

$$\left( R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)$$

注　$R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = {}^tR_\theta$ に注意

$\longrightarrow$ ${}^tR_\theta R_\theta = R_\theta^{-1} R_\theta = I_2$

$$\left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \underbrace{{}^tR_\theta R_\theta}_{\substack{\parallel \\ R_\theta^{-1} R_\theta = I_2}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)$$

---

$\boxed{P : 2 \times 2 \quad {}^tP P = I_2}$ とする　　$P$ は直交.

$$\left( P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tP P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)$$
$$= \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)$$

<u>例</u>　$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ は ${}^tQ Q = I_2$ を

満たす

各自示す.