2019 年 11 月 06 日微分積分小テスト解答

問題 $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう．

解答 まず B の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_B(\lambda) &= |\lambda I_2 - B| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & -2 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-6)(\lambda-3) - (-2)^2 = (\lambda-2)(\lambda-7)\end{aligned}$$

から B の固有値は $\lambda = 2, 7$ であることが分かります。次に $\lambda = 2, 7$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 2$ のとき、

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 7$ のとき、

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$BP = (B\vec{p}_1 \ B\vec{p}_2) = (2\vec{p}_1 \ 7\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

から $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ と B は対角化できます。

補足さらに P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned}\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(P^{-1}B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(P^{-1}BP \cdot P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\ &= 2\xi^2 + 7\eta^2\end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いました。