2019 年 10 月 30 日小テスト

$p, q, r > 0$ とします．生産関数

$$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}$$

に対して利潤関数

$$\pi(x,y) = rf(x,y) - px - qy$$

を考えます．$\pi(x,y)$ の停留点を求めて，$\mathbf{R}^2_{++}$ 上の最大点であることを示しましょう．

解答

$$\pi(x,y) = rx^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} - px - qy$$

を偏微分すると

$$\boxed{\begin{aligned} \pi_x &= \frac{r}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}} - p = 0 \\ \pi_y &= \frac{r}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{2}} - q = 0 \end{aligned}}$$

2

となります．これは整理すると

$$x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}} = \frac{3p}{r} \tag{1}$$

$$x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{2q}{r} \tag{2}$$

となります．(1)× (2) から

$$x^{-\frac{1}{3}} = \frac{6pq}{r^2} \quad 従って \quad x = \frac{r^6}{2^3 3^3 p^3 q^3}$$

となります．さらに

$$y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{3}} \frac{3p}{r} = \frac{r^3}{12pq^2} \quad 従って \quad y = \frac{r^6}{144p^2q^4}$$

となります．以上で停留点が

$$(x,y) = (x_0, y_0) = \left(\frac{r^6}{2^3 3^3 p^3 q^3}, \frac{r^6}{144p^2q^4} \right)$$

$$\begin{vmatrix} \# & \bigcirc \\ \bigcirc & \$ \end{vmatrix}$$

であることが分かりました．つぎに $\pi(x,y)$ の 2 階の偏導関数を求めます．

$$\pi_{xx} = -\frac{2r}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{2}}$$

$$\pi_{xy} = \frac{r}{6} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\pi_{yy} = -\frac{r}{4} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{3}{2}}$$

By Young

$= \pi_{yx}$

から

$$\pi_{xx} = -\frac{2r}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{2}} < 0 \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

$$\det(H(\pi)) = \begin{vmatrix} -\frac{2r}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{2}} & \frac{r}{6} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{r}{6} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{2}} & -\frac{r}{4} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} \quad +$$

$$= \frac{r}{36} x^{-\frac{4}{3}} y^{-1} > 0 \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

$$= \frac{r^2}{18} x^{-\frac{4}{3}} y^{-1} - \frac{r^2}{36} x^{-\frac{4}{3}} y^{-1}$$

であることが分かります．従って

$$\pi(x_0, y_0) > \pi(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}, \ (x,y) \neq (x_0, y_0))$$

であることが示されました．

以上で生産要素需要関数が

$$x(p,q,r) = \frac{r^6}{2^3 3^3 p^3 q^3}$$

$$y(p,q,r) = \frac{r^6}{144p^2q^4}$$

であることが示されました．

補足問題　供給関数と利潤関数をそれぞれ

$$F(p,q,r) = f(x(p,q,r), y(p,q,r))$$
$$\Pi(p,q,r) = rF(p,q,r) - px(p,q,r) - qy(p,q,r)$$

と定めるとき，具体的な計算を用いてホテリングの補題

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = F(p,q,r), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p} = -x(p,q,r), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = -y(p,q,r)$$

が成立することを示しましょう．

供給関数と利潤関数は

$$\begin{aligned} F(p,q,r) &= x(p,q,r)^{\frac{1}{3}} \cdot y(p,q,r)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{p^2}{6pq} \cdot \frac{p^3}{12pq^2} \\ &= \frac{P^5}{72p^2q^3} \\ \Pi(p,q,r) &= pF(p,q,r) \\ &\quad - px(p,q,r) - qy(p,q,r) \\ &= \frac{P^6}{72p^2q^3} - \frac{P^6}{216p^2q^3} - \frac{P^6}{144p^2q^3} \\ &= \frac{P^6}{72p^2q^3}\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{P^6}{432p^2q^3} \end{aligned}$$

となります．これから

$$\begin{aligned} \Pi_p &= 6\frac{p^5}{432p^2q^3} = \frac{p^5}{72p^2q^3} = F(p,q,r) \\ \Pi_p &= -2\frac{p^6}{432p^3q^3} = -\frac{p^6}{216p^3q^3} = -x(p,q,r) \\ \Pi_q &= -3\frac{p^6}{432p^2q^4} = -\frac{p^6}{144p^2q^4} = -y(p,q,r) \end{aligned}$$

が従います．

2 変数の（狭義）凸関数

U 　凸

$\begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{pmatrix}$

× (a,b) 　 × (x,y)

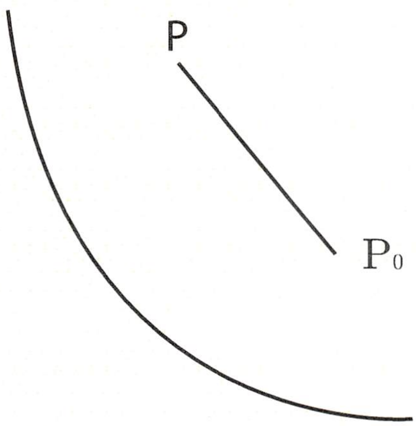
- $\mathbf{R}^2$ の凸開集合 U 上の C^2 級関数 $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$
- $f_{xx}(P) > 0$, $\det(H(f)(P)) > 0$ $(P \in U)$ とする。このとき $(x,y) \neq (a,b)$ ならば

$$f(x,y) > f(a,b) + \underbrace{f_x(a,b)}_{=0}(x-a) + \underbrace{f_y(a,b)}_{=0}(y-b)$$

・さらに $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ のとき

$$f(x,y) > f(a,b) \quad ((x,y) \neq (a,b))$$

証明の準備



- （証明の準備）$\mathbf{P}(x,y)$ と $\mathbf{P}_0(a,b)$ に対して $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}_0$ とする。そして

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

証明

- $F(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ に Taylor の定理を適用
- $F(1) - F(0) = F'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2} F''(c) \cdot 1^2$
  を満たす c が 0 と 1 の間に存在する。
- $f(x, y) - f(a, b) = f_x(a, b)\xi + f_y(a, b)\eta + \frac{1}{2}(H(f)(P_c)\vec{v}, \vec{v})$
- $\vec{v} \neq \vec{0}$ ですから $(H(f)(P_c)\vec{v}, \vec{v}) > 0$
- $f(x, y) - f(a, b) > f_x(a, b)\xi + f_y(a, b)\eta$

極大・極小の判定

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数 $f: U \to \mathbf{R}$

（復習）

f が $(a, b) \in U$ で極小・極大ならば $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$

このとき (a, b) を f の停留点という。停留点が極大・極小になる十分条件を与える。

定理　fが C^2級.（ f_x, f_y, f_{**} が各点で存在 / f, f_x, f_y, f_{**} が各点で連続.

$(a, b) \in U$ が $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ を満たす。

$f_{xx}(a, b) > 0$, $\underbrace{f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2}_{= \det(H(f)(a,b))} > 0$

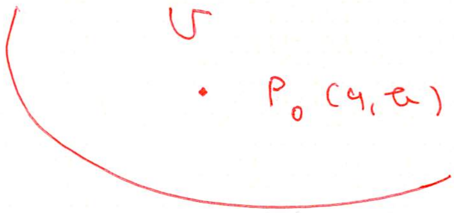
<

（$H(f)(a, b)$ は正定値）

このとき (a, b) で極小となる。

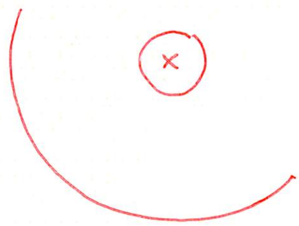
大

証明のために必要な連続関数の性質



[illegible]

- $\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数 $G: U \longrightarrow \mathbf{R}$ は連続とする
- $(a,b) \in U$ に対して $G(a,b) > 0$ とする。
- このとき正数 $\delta > 0$ が存在して



$$G(x,y) > 0 \quad ((x,y) \in B_\delta(a,b))$$

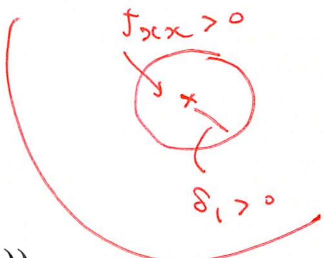
・GがU上連続 ⟺ GがUの各点で連続.

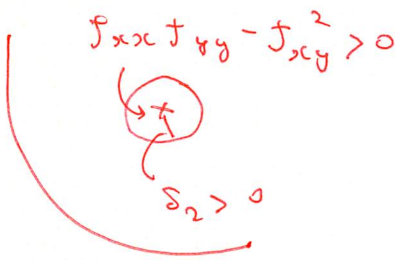
・Gが $P_0(a,b) \in U$ で連続

$\iff P_\ell \in U,\ P_\ell \to P_0 \ (\ell \to +\infty)$

$\implies G(P_\ell) \to G(P_0) \ (\ell \to +\infty)$

証明



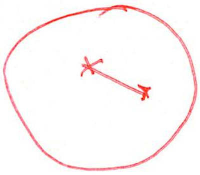


- f_{xx} と $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ は連続です。
- $f_{xx}(x,y) > 0 \ ((x,y) \in B_\delta(a,b))$
  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \ ((x,y) \in B_\delta(a,b))$
  を満たす正数 $\delta > 0$ が存在。

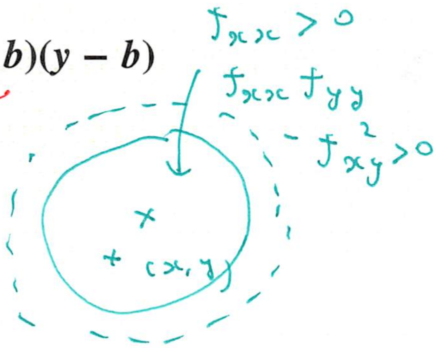
$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ とする.

- 凸性の定理を用いると $(x,y) \in B_\delta(a,b)$ が $(x,y) \neq (a,b)$ ならば

$$\begin{aligned} f(x,y) &> f(a,b) + \underbrace{f_x(a,b)}_{=0}(x-a) + \underbrace{f_y(a,b)}_{=0}(y-b) \\ &= f(a,b) \end{aligned}$$



凸性示せるか?



$f(x,y) > f(a,b)$

$\lambda = 1$ $\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ $(I_2 - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\lambda = 6$ $\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ $(6I_2 - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\lambda \neq 1, 6$ $(\lambda I_2 - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$C : 2 \times 2$

2018 年 11 月 28 日微分積分小テスト解答

C 正則 $\Leftrightarrow \left(C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow |C| \neq 0$

問題 $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう．

$|C| = 0 \Leftrightarrow \left(C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}\right)$

解答 まず B の固有値を求めます。

$$\Phi_B(\lambda) = |\lambda I_2 - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda - 5) - 2^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

1, 6

から B の固有値は $\lambda = 1, 6$ であることが分かります。次に $\lambda = \cancel{-3, 7}$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 1$ のとき、

$-x + 2y = 0$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

$2x - 4y = 0$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 0$

$\perp$

一般論．

B が対称だから．

となります。 $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(ii) $\lambda = 6$ のとき、

$4x + 2y = 0$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

$2x + y = 0$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$BP = (B\vec{p}_1\ B\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ 6\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

から $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ と B は対角化できます。

$BP = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

P^{-1}

$P^{-1}BP = \underbrace{P^{-1}P}_{= I_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

補足 さらに P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(P^{-1}B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left(P^{-1}BP \cdot P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$
$$= \xi^2 + 6\eta^2$$

回転は内積を保つ．

となります。ここで回転座標変換 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いました。

$P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$= \underbrace{2x^2 - 4xy}_{} + 5y^2$

交叉項 cross-term.

$\lambda = 1$ $\quad \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して $(I_2 - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Updownarrow$

$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\uparrow$

非自明解あり

$\downarrow$

$\lambda = 6$ $\quad \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して $(6I_2 - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

non-trivial solution

$\Updownarrow$

$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\lambda \neq 1, 6$ $\quad (\lambda I_2 - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

自明解しかない

C : 2×2

C : 正則 $\Longleftrightarrow \left(C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right) \Longleftrightarrow |C| \neq 0$

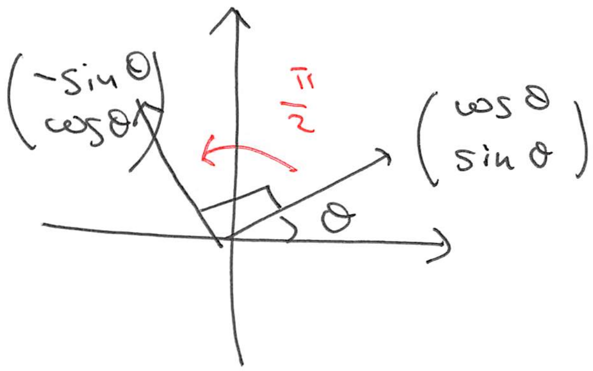
ある $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ $\Longleftrightarrow |C| = 0$

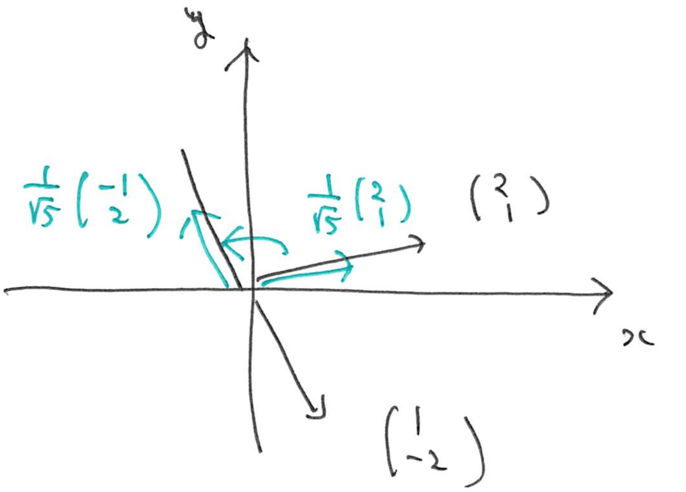
$\longleftarrow$

ここが難しい。

3×3 で理解できるとすごい

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$





$$P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

回転行列.

$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 固有値 1

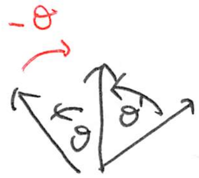
$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

固有値 6

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_\theta \cdot R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$$



$$R_\theta \cdot R_{-\theta} = R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rotatebox{90}{$=$}$$

$$R_{-\theta} \cdot R_\theta$$

$$\rightsquigarrow \quad (R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}.$$

R 回転

$$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2)$$

詳しくは次回

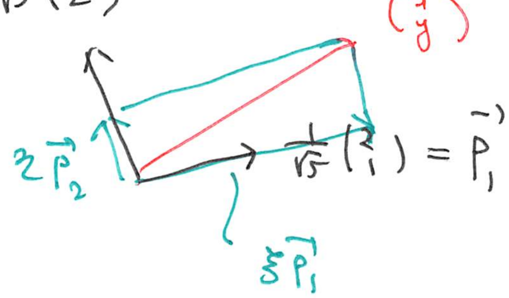
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ -2x + 5y \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1 + \eta \vec{p}_2$$

$$= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$



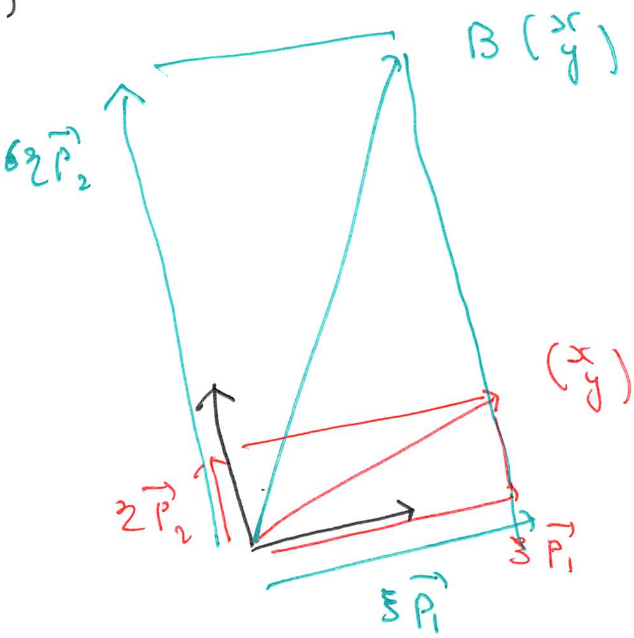
逆の対応

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= P^{-1} B P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi \\ 6\eta \end{pmatrix}$$

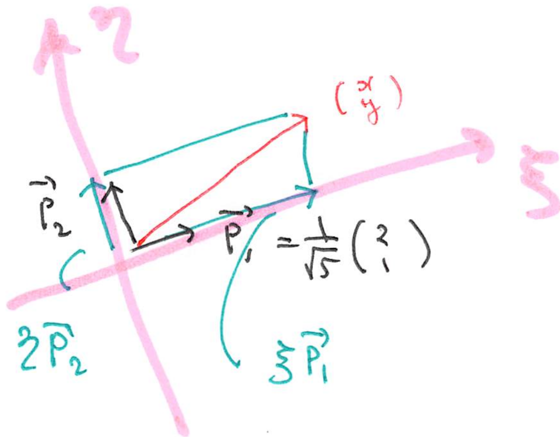


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ -2x + 5y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1 + \eta \vec{p}_2$$

$$= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

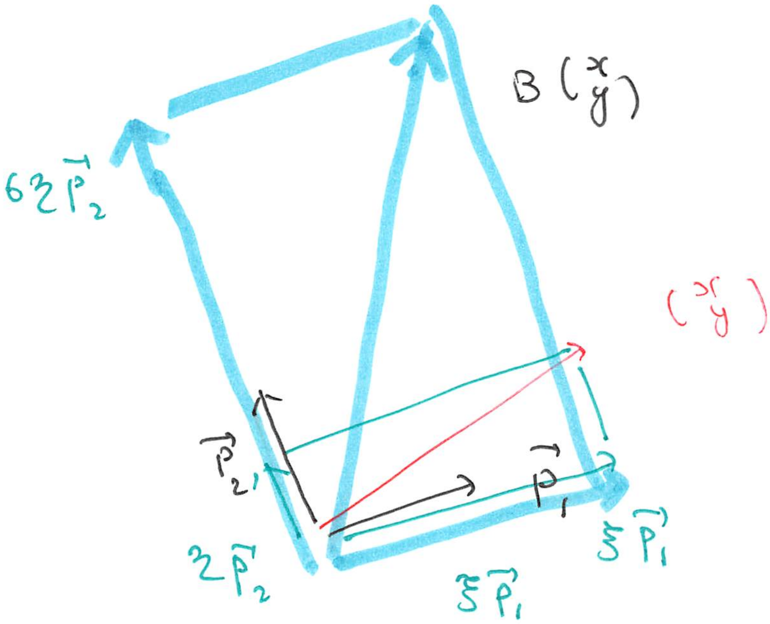


逆の対応

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} B P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ 6\eta \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1 + \eta \vec{p}_2$$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi B \vec{p}_1 + \eta B \vec{p}_2$$

$$= \xi \vec{p}_1 + \eta \cdot 6 \vec{p}_2$$