2019 年 10 月 30 日小テスト

$p, q, r > 0$ とします．生産関数

$$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}$$

に対して利潤関数

$$\pi(x,y) = rf(x,y) - px - qy$$

を考えます．$\pi(x,y)$ の停留点を求めて，$\mathbf{R}^2_{++}$ 上の最大点であることを示しましょう．

解答

$$\pi(x,y) = rx^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}} - px - qy$$

を偏微分すると

$$\pi_x = \frac{r}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}} - p = 0$$

$$\pi_y = \frac{r}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{2}} - q = 0$$

となります．これは整理すると

$$x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}} = \frac{3p}{r} \tag{1}$$

$$x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{2q}{r} \tag{2}$$

となります．(1)× (2) から

$$x^{-\frac{1}{3}} = \frac{6pq}{r^2} \quad 従って \quad x = \frac{r^6}{2^3 3^3 p^3 q^3}$$

となります．さらに

$$y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{3}} \frac{3p}{r} = \frac{r^3}{12pq^2} \quad 従って \quad y = \frac{r^6}{144p^2q^4}$$

となります．以上で停留点が

$$(x,y) = (x_0, y_0) = \left(\frac{r^6}{2^3 3^3 p^3 q^3}, \frac{r^6}{144p^2q^4} \right)$$

であることが分かりました．つぎに $\pi(x,y)$ の 2 階の偏導関数を求めます．

$$\begin{aligned} \pi_{xx} &= -\frac{2r}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{2}} \\ \pi_{xy} &= \frac{r}{6} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{2}} \\ \pi_{yy} &= -\frac{r}{4} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \pi_{xx} &= -\frac{2r}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{2}} < 0 \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}) \\ \det(H(\pi)) &= \begin{vmatrix} -\frac{2r}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{2}} & \frac{r}{6} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{r}{6} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{2}} & -\frac{r}{4} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{r}{36} x^{-\frac{4}{3}} y^{-1} > 0 \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}) \end{aligned}$$

であることが分かります．従って

$$\pi(x_0, y_0) > \pi(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++},\ (x,y) \neq (x_0, y_0))$$

であることが示されました．

以上で生産要素需要関数が

$$\begin{aligned} x(p,q,r) &= \frac{r^6}{2^3 3^3 p^3 q^3} \\ y(p,q,r) &= \frac{r^6}{144p^2q^4} \end{aligned}$$

であることが示されました．

補足問題　供給関数と利潤関数をそれぞれ

$$F(p,q,r) = f(x(p,q,r), y(p,q,r))$$
$$\Pi(p,q,r) = rF(p,q,r) - px(p,q,r) - qy(p,q,r)$$

と定めるとき，具体的な計算を用いてホテリングの補題

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = F(p,q,r), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p} = -x(p,q,r), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = -y(p,q,r)$$

が成立することを示しましょう．

供給関数と利潤関数は

$$\begin{aligned} F(p,q,r) &= x(p,q,r)^{\frac{1}{3}} \cdot y(p,q,r)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{p^2}{6pq} \cdot \frac{p^3}{12pq^2} \\ &= \frac{P^5}{72p^2q^3} \\ \Pi(p,q,r) &= pF(p,q,r) \\ &\quad - px(p,q,r) - qy(p,q,r) \\ &= \frac{P^6}{72p^2q^3} - \frac{P^6}{216p^2q^3} - \frac{P^6}{144p^2q^3} \\ &= \frac{P^6}{72p^2q^3}\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{P^6}{432p^2q^3} \end{aligned}$$

となります．これから

$$\begin{aligned} \Pi_p &= 6\frac{p^5}{432p^2q^3} = \frac{p^5}{72p^2q^3} = F(p,q,r) \\ \Pi_p &= -2\frac{p^6}{432p^3q^3} = -\frac{p^6}{216p^3q^3} = -x(p,q,r) \\ \Pi_q &= -3\frac{p^6}{432p^2q^4} = -\frac{p^6}{144p^2q^4} = -y(p,q,r) \end{aligned}$$

が従います．