

2019年10月30日演習問題解答

I は web を参照. II は 10 月 30 日の小テスト解答を参照.

III 生産関数

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta \quad (\alpha, \beta > 0)$$

を考えます.

(1) $\det(H(f))$, f_{xx} を計算しましょう.

(2) $\alpha + \beta \neq 1$ のとき, 利潤関数

$$\pi(x, y) := pf(x, y) - qx - ry$$

の停留点を求めましょう. ここでは $p, q, r > 0$ とします.

(3) $\alpha + \beta < 1$ のとき利潤を最大化する (x, y) がただ一つ存在することを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned} f_x &= \alpha x^{\alpha-1} y^\beta \\ f_y &= \beta x^\alpha y^{\beta-1} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta \\ f_{xy} &= f_{yx} = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ f_{yy} &= \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2} \end{aligned}$$

が分かります. これから

$$\begin{aligned} \det H(f) &= \begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta & \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2} \end{vmatrix} \\ &= x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} (\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1) - \alpha^2\beta^2) \\ &= x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} \alpha\beta ((\alpha-1)(\beta-1) - \alpha\beta) \\ &\quad - x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} \alpha\beta(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

となります.

(2) $\pi_x = \pi_y = 0$ すなわち

$$\begin{cases} p\alpha x^{\alpha-1}y^\beta - q = 0 & \dots\dots (1) \\ p\beta x^\alpha y^{\beta-1} - r = 0 & \dots\dots (2) \end{cases}$$

を解きます. これは

$$\begin{cases} x^{\alpha-1}y^\beta = \frac{q}{p\alpha} & \dots\dots (1)' \\ x^\alpha y^{\beta-1} = \frac{r}{p\beta} & \dots\dots (2)' \end{cases}$$

と必要十分です. (1)'/(2)' から

$$x^{-1}y = \frac{q}{r} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{従って} \quad y = \frac{q}{r} \cdot \frac{\beta}{\alpha} x$$

となりますが, これを (1)' に代入すると

$$x^{\alpha-1} \left(\frac{q}{r} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \right)^\beta x^\beta = \frac{q}{p\alpha}$$

から

$$\begin{aligned} x^{\alpha+\beta-1} &= \frac{q}{p\alpha} \cdot \frac{r^\beta}{q^\beta} \cdot \frac{\alpha^\beta}{\beta^\beta} \\ &= \left(\frac{\alpha}{q} \right)^{\beta-1} \left(\frac{r}{\beta} \right)^\beta \cdot \frac{1}{p} \end{aligned}$$

から

$$x = \left(\frac{\alpha}{q} \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}} \left(\frac{r}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

同様に

$$y = \left(\frac{q}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \left(\frac{r}{\beta} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}} \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

となります.

(3) $\alpha + \beta < 1$ のとき $\alpha, \beta > 0$ から $\alpha, \beta < 1$ が従いますから

$$\pi_{xx} = pf_{xx} = p\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta < 0$$

が常に成立します。さらに

$$\begin{aligned}\det(H(\pi)) &= \begin{vmatrix} pf_{xx} & pf_{xy} \\ pf_{yx} & pf_{yy} \end{vmatrix} \\ &= p^2 \det(H(f)) \\ &= p^2 \alpha \beta (1 - \alpha - \beta) x^{2\alpha-2} y^{2\beta-2} > 0\end{aligned}$$

となります。従って (2) で求めた停留点を (x_0, y_0) とすると

$$\pi(x, y) < \pi(x_0, y_0) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2, (x, y) \neq (x_0, y_0))$$

が成立します。

IV 生産関数 $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ に対する利潤関数

$$\pi(x, y) = pf(x, y) - qx - ry$$

を最大化して生産要素需要関数

$$x(p, q, r) = \frac{p^3}{27q^2r}, \quad y(p, q, r) = \frac{p^3}{27qr^2}$$

を求めました。利潤関数

$$\Pi(p, q, r) = \pi(x(p, q, r), y(p, q, r))$$

生産物供給関数

$$z(p, q, r) = f(x(p, q, r), y(p, q, r))$$

を定義すると

$$z(p, q, r) = \frac{\partial \Pi}{\partial p}, \quad x(p, q, r) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \quad y(p, q, r) = -\frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

が成立することを、具体的に両辺を計算することで示しましょう。

解答

$$\begin{aligned}\Pi(p, q, r) &= r \cdot \left(\frac{p^3}{27q^2r} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{p^3}{27qr^2} \right)^{\frac{1}{3}} - q \cdot \frac{p^3}{27q^2r} - r \cdot \frac{p^3}{27qr^2} \\ &= \frac{p^3}{9qr} - \frac{p^3}{27qr} - \frac{p^3}{27qr} \\ &= \frac{p^3}{27qr} \\ z(p, q, r) &= \left(\frac{p^3}{27q^2r} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{p^3}{27qr^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{p^2}{9qr}\end{aligned}$$

となります。これから

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p} = \frac{3p^2}{27qr} = \frac{p^2}{9qr} = z(p, q, r), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = -\frac{p^3}{27q^2r} = -x(p, q, r), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial r} = -\frac{p^3}{27qr^2} = -y(p, q, r)$$

と Hotelling の補題が成立することが分かります。