CalcNT 2019w
Lec 05, 10/23

1) A = 対称行列

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 2 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

$= \lambda I_2 - A$

なので

$$|B| = \underline{(\lambda-2)(\lambda-5)} - 4$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$$
$$= (\lambda-1)(\lambda-6)$$

から求める λ は $\lambda = 1, 6$ である

A の固有値

$\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A|$ A の固有多項式

$A : 2\times 2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$

固有値

$= (\lambda-a)(\lambda-d) - bc$

$= \lambda^2 - \boxed{(a+d)}\lambda + \boxed{ad-bc}$

$ad - bc = |A|$

$a+d = \mathrm{tr}(A)$ A のトレース 跡 (trace)

2) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$

$$\boxed{B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}} \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x - 2y = 0$$

$-x+2y=0$

$2x-4y=0$

から解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \in \mathbb{R})$$

$y \neq 0$ のとき

$\iff (I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$(I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ のとき 固有ベクトル

$\underline{\lambda = 6 \text{ のとき}}$

$4x+2y=0$

$$\boxed{B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}} \iff \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff 2x + y = 0$$

$2x+y=0$

から解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{(x \in \mathbb{R})}$$

$x \neq 0$ のとき

$\iff (6I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$(6I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

固有値6の固有ベクトル

行列に関する補足 (1)

正則性

Nobuyuki TOSE

October 18, 2017
V02 October 03, 2019

行列の正則性

余因子行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

を A の余因子行列と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

から

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_2$$

い
$(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

が従う.

正則性

正則行列

2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対してある $X \in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$AX = XA = I_2$$

が成立するとき A は正則であるという.

注意

$$\left.\begin{array}{l} AX = XA = I_2 \\ AY = YA = I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow X = Y$$

自分で考える

が成立するので X を A の逆行列と呼ぶ（A^{-1} と記す）.

正則性（十分条件）

定理

$|A| = ad - bc \neq 0$ ならば A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_2$$

の両辺を $\frac{1}{|A|}$ 倍する.

$$\frac{1}{|A|}\cdot(A\tilde{A}) = \frac{1}{|A|}(\tilde{A}A) = \frac{1}{|A|}\cdot|A| I_2$$

$$A \cdot \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} \cdot A = I_2$$

正則性の必要条件

$\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases}$

$A^{-1}\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$

$\shortparallel$

$(A^{-1}A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

定理

(1) A が正則 $\Rightarrow \left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0}\right)$

$\Uparrow$

(2) $|A| \neq 0 \;\Rightarrow\; \left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0}\right)$

(1)

$$A\vec{v} = \vec{0} \longrightarrow \underbrace{A^{-1}A\vec{v}}_{\shortparallel \; I_2\vec{v} = \vec{v}} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0} \longrightarrow \vec{v} = I_2\vec{v} = \vec{0}$$

(2)

$$x = \frac{\begin{vmatrix}0 & b\\0 & d\end{vmatrix}}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix}a & 0\\c & 0\end{vmatrix}}{|A|} = 0$$

(2) の逆

$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix} = |A|\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = O_2 = (\vec{0}\ \vec{0})$

$\shortparallel\ 0$

定理

(3) ((2) の逆) $\left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}\right) \Rightarrow |A| \neq 0$

(3)' ((3) の対偶) $|A| = 0 \Rightarrow$ ある $\vec{v} \neq \vec{0}$ に対して $A\vec{v} = \vec{0}$

(3)' を示す．$|A| = ad - bc = 0$ ならば

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} = \vec{0}$$

or $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\begin{pmatrix}d\\-c\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

となるので，$NOT(a = b = c = d = 0)$ ならばある $\vec{v} \neq \vec{0}$ が $A\vec{v} = \vec{0}$ を満たす．他方 $a = b = c = d = 0$ のときは明らかである．

たとえば $O_2\,\vec{e}_1 = \vec{0}$ $\qquad A = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

まとめ

以上によって以下の定理を示した.

定理

以下は同値である.

(1) A は正則である.

(2) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(3) $|A| \neq 0$

(3)' $|A| = 0 \Longrightarrow \exists \vec{v} \neq \vec{0}$ に対して $A\vec{v} = \vec{0}$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ 実対称

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

<u>定理</u> $a > 0,\ |A| = ab - c^2 > 0 \Longrightarrow \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0$

$\Longleftarrow$ 逆も OK $\qquad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + by^2 - \frac{c^2}{a}y^2$$

$$= \underbrace{\underbrace{a}_{>0}\underbrace{\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} + \underbrace{\underbrace{\frac{ab - c^2}{a}}_{>0}\underbrace{y^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq 0$$

$p,\ q \geq 0$ とする.

$$p + q = 0 \Longrightarrow p = q = 0$$

$\Longleftrightarrow a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0$

$\Longleftrightarrow x + \frac{c}{a}y = y = 0$

$\Longleftrightarrow x = y = 0$

$$\underbrace{\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^2}_{=0} = x^2 + y^2 \Longrightarrow x = y = 0$$

2018年11月28日微分積分小テスト解答

問題 $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう.

解答 まず B の固有値を求めます。

$$\Phi_B(\lambda) = |\lambda I_2 - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda - 5) - 2^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

から B の固有値は $\lambda = 1, 6$ であることが分かります。次に $\lambda = -3, 7$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 1$ のとき、

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 6$ のとき、

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

ここまで

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$BP = (B\vec{p}_1\ B\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ 6\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

から $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ と B は対角化できます。

補足 さらに P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(P^{-1}B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left(P^{-1}BP \cdot P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$
$$= \xi^2 + 6\eta^2$$

となります。ここで回転座標変換 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いました。

2 変数の（狭義）凸関数

$P_1, P_2 \in U \Rightarrow \overline{P_1P_2} \subset U$

定義

by Young

$$H(f)(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & \boxed{f_{xy}(P)} \\ \boxed{f_{yx}(P)} & f_{yy}(P) \end{pmatrix}, \quad f_{xy}(P) = f_{yx}(P)$$

- $\mathbf{R}^2$ の凸開集合 U 上の C^2 級関数 $f:\ U \longrightarrow \mathbf{R}$
- $f_{xx}(P) > 0$, $\det(H(f)(P)) > 0$ ($P \in U$) とする。このとき $(x, y) \neq (a, b)$ ならば

$$f(x, y) > f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

$<$

$<$

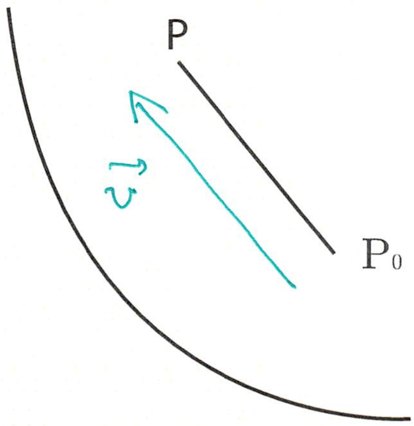
$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

$P(x,y)$　$P_0(a,b)$

(a,b) における $z=f(x,y)$ の接平面

証明の準備

$$\left(H(f)(P)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \neq \vec{0},\ \forall P \in U\right)$$



- （証明の準備）$\mathbf{P}(x, y)$ と $\mathbf{P}_0(a, b)$ に対して $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}_0$ とする。そして

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x - a\\ y - b\end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$\| \ \overrightarrow{P_0P}$

証明

$(a,b)+t\,(x-a,\,y-b)$ $= P_t$

$t=1$

$(a+\xi,\ b+\eta)$

$=(a+(x-a),\ b+(y-b))$

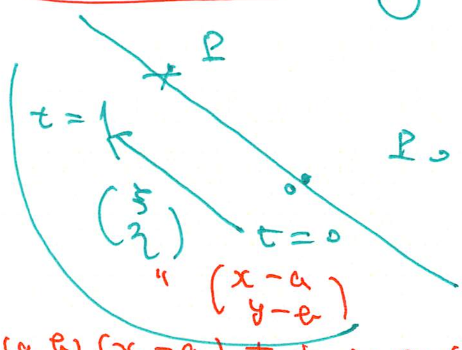
$=(x,y)$

- $F(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ に Taylor の定理を適用
- $F(1) - F(0) = F'(0)\cdot 1 + \boxed{\frac{1}{2}F''(c)\cdot 1^2}$ >0
  を満たす c が 0 と 1 の間に存在する。
- $f(x, y) - f(a, b) = f_x(a, b)\xi + f_y(a, b)\eta + \boxed{\frac{1}{2}(H(f)(P_c)\vec{v}, \vec{v})}$ >0
- $\vec{v} \neq \vec{0}$ ですから $(H(f)(P_c)\vec{v}, \vec{v}) > 0$
- $f(x, y) - f(a, b) > \boxed{f_x(a, b)\xi + f_y(a, b)\eta}$ $= f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

方向微分 $\to F'(t) = f_x(P_t)\cdot\xi + f_y(P_t)\cdot\eta$

$F''(t) = \left(H(f)(P_t)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)$

>0 $\left(\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \neq 0\right.$ に注意$\left.\right)$



ここまで

極大・極小の判定

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数 $f:\ U \to \mathbf{R}$

（復習）

f が $(a, b) \in U$ で極小・極大ならば $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$

このとき (a, b) を f の停留点という。停留点が極大・極小になる十分条件を与える。

定理

$(a, b) \in U$ が $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ を満たす。
$f_{xx}(a, b) > 0,\ f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0$

（$H(f)(a, b)$ は正定値）

このとき (a, b) で極小となる。

定理　P_0 の

U: $\mathbb{R}^2$ の開凸　　$f: U \to \mathbb{R}$

$f_x(P_0) = 0$, $f_y(P_0) = 0$

$f_{xx}(P) > 0$, $\det(H(f)(P)) > 0$

$<$

$(\forall P \in U)$

$\Longrightarrow$ $P \neq P_0$ とすると

$<$

$f(P) > f(P_0)$

(P_0 は f の唯一の最小点)

・大

$$f(x,y) = \boxed{A}\, x^{\alpha} y^{\beta} \qquad \alpha, \beta > 0$$

コブ・ダグラス型生産関数.

$$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

	生産要素		生産物
	I	II	
価格	p	q	r
投入量	x	y	$z = f(x,y)$

収益 profit

$$\pi(x,y) = r f(x,y) - px - qy. \qquad (x, y > 0)$$

$$= r x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - px - qy$$

$$\pi_x = \frac{r}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} - p = 0 \quad \rightarrow \quad x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \frac{3p}{r}$$

$$\pi_y = \frac{r}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} - q = 0 \quad \rightarrow \quad x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} = \frac{3q}{r}$$

① × ②^2

$$\frac{1}{y} = \left(\frac{3p}{r}\right) \times \left(\frac{3q}{r}\right)^2$$

$$= \frac{27pq^2}{r^3}$$

$$y = \frac{r^3}{27pq^2}, \quad x = \frac{r^3}{27p^2q}.$$

$$\pi_{xx} = -\frac{2r}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{3}} < 0$$

注意

$$\pi_{xy} = \frac{r}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}}$$

$$\pi_{yy} = -\frac{2r}{9} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{5}{3}}$$

生産要素
需要関数

$$\det(H(\pi)) = \begin{vmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{9} r x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{3}} & \frac{r}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{r}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{9} r x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{5}{3}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4}{81} r^2 x^{-\frac{4}{3}} y^{-\frac{4}{3}} - \frac{r^2}{81} x^{-\frac{4}{3}} y^{-\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{3}{81} r^2 x^{-\frac{4}{3}} y^{-\frac{4}{3}} > 0$$

$(x, y) \neq \left(\frac{r^3}{27pq^2}, \frac{r^3}{27p^2q} \right)$ ならば

$$\pi(x, y) < \pi\left(\frac{r^3}{27pq^2}, \frac{r^3}{27p^2q} \right)$$

$f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}$ に対して停留点を求める.