

$$1) \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 2 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

特征值

$$\begin{aligned} |B| &= (\lambda-2)(\lambda-5) - 4 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 \\ &= (\lambda-1)(\lambda-6) \end{aligned}$$

特征值为 $\lambda = 1, 6$

$$2) \quad \lambda = 1 \text{ 的特征值}$$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

特征向量为 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \in \mathbb{R})$$

$$\lambda = 6 \text{ 的特征值}$$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

特征向量为 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R})$$