2019 年 10 月 23 日微分積分演習問題

I 以下の函数の停留点を求めて極大・極小を判定しましょう.

(1) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$

(2) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

(3) $z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$

(4) $z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$

(5) $z = x^3 - xy - y^2$

(6) $z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$

(7) $z = x^3 + y^3 + 6xy$

解答 (1)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 &= 0 \\ z_y &= x + 2y - 8 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式を使って解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{3} = 4$$

となりますから，$(x, y) = (0, 4)$ が z の停留点であることが分かります．さらに

$$z_{xx} = 2,\ z_{xy} = z_{yx} = 1,\ z_{yy} = 2$$

と計算されるので

$$z_{xx} = 2 > 0, \quad \det(H(z)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$

から $(x, y) = (0, 4)$ で z は極小であることが分かります.

注意 $z_{xx} > 0$, $\det(H(z)) > 0$ が $\mathbf{R}^2$ のすべての点で成立しますから

$$z(0, 4) < z(x, y) \quad ((x, y) \neq (0, 4))$$

が成立することが分かります.

注意 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned}
z &= \left(A\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right) \\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) \\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

と展開できます．ここで

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, {}^tA\vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, A\vec{\alpha}\right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned}
z &= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) \\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + \left(2A\vec{\alpha}+\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha})
\end{aligned}$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}
(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= -\frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\right) = -16
\end{aligned}$$

から

$$z = \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) - 16$$

となります．ここで

$$A\text{の}(1,1)\text{成分} = 1 > 0, \quad |A| = \frac{3}{4} > 0$$

から A が定める 2 次形式は正定値であること，すなわち

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$$

であることが分かります．従って

$$\begin{aligned}
z(X,Y) &= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) - 16 \\
&> 0 - 16 = (A\vec{0}, \vec{0}) - 16 = Z(X=0, Y=0)
\end{aligned}$$

が分かります．よって z の最小値は $X = Y = 0$ すなわち $(x, y) = (0, 4)$ のとき -16 であることが分かります．

(2)

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2 - 9y &= 0 \cdots (I) \\ z_y &= 3y^2 - 9x &= 0 \cdots (II) \end{cases}$$

を解きます．(I) から $y = \frac{1}{3}x^2$ となるので (II) から得られる $y^2 = 3x$ に代入して

$$\frac{1}{9}x^4 = 3x \quad \text{すなわち} \quad x^4 = 27x$$

を得ます．従って

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = 3$$

が必要です．

(a) $\underline{x = 0\ \text{のとき}}$, (I) から $y = 0$ となりますが、逆に $(x, y) = (0, 0)$ は (I) かつ (II) を満たします．

(b) $\underline{x = 3\ \text{のとき}}$, (I) から $y = 3$ となりますが、逆に $(x, y) = (3, 3)$ は (I) かつ (II) を満たします．

以上で z の停留点は $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$ であることが分かりました．

さらに

$$z_{xx} = 6x,\ z_{xy} = z_{yx} = -9,\ z_{yy} = 6y$$

であることに注意すると

(a) $\underline{(x, y) = (0, 0)\ \text{のとき}}$,

$$\det H(z)(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} = -81 < 0$$

なりますから，z は $(x, y) = (0, 0)$ で極大でも極小でもないことが分かります．

(b) $\underline{(x, y) = (3, 3)\ \text{のとき}}$,

$$z_{xx}(3, 3) = 18 > 0, \quad \det H(z)(3, 3) = \begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} = 9^2 \cdot 3 > 0 < 0$$

なりますから，z は $(x, y) = (0, 0)$ で極小であることが分かります．

(3)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 &= 0 \\ z_y &= x - 2y - 2 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから，$(x, y) = (2, 0)$ が z の停留点であることが分かります．

さらに

$$z_{xx} = 2,\ z_{xy} = z_{yx} = 1,\ z_{yy} = -2$$

と計算されるので

$$\det(H(z)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 1^2 = -5 < 0 > 0$$

から $(x, y) = (2, 0)$ で z は極大でも極小でもないことが分かります．

(4)

$$\begin{cases} z_x &= & 2x + 4y - 6 &= & 0 \\ z_y &= & 4x + 4y - 8 &= & 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1$$

から停留点は $(x, y) = (1, 1)$ となります．

さらに

$$z_{xx} = 2,\ z_{xy} = z_{yx} = 4,\ z_{yy} = 4$$

であるので

$$\det(H(z)) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

となるので $(x, y) = (1, 1)$ では極大でも極小でもないことが分かる。

(5)

$$\begin{cases} z_x &= & 3x^2 - y &= & 0 & \quad (i) \\ z_y &= & -x - 2y &= & 0 & \quad (ii) \end{cases}$$

を解きます。(ii) から $x = -2y$ となりますが，これを (i) に代入して

$$12y^2 - y = 0$$

を得ますが，これから $y = 0$ または $y = \frac{1}{12}$ であることが分かります．これを $x = -2y$ に代入して

$$\begin{array}{lll} y = 0 & \text{のとき} & x = 0 \\ y = \frac{1}{12} & \text{のとき} & x = -\frac{1}{6} \end{array}$$

となりますから，停留点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad (-\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$$

であることが分かります．

さらに

$$z_{xx} = 6x,\ z_{xy} = z_{yx} = -1,\ z_{yy} = -2$$

であることを用いて，この 2 点の極大・極小を判定しましょう．

(a) $(x, y) = (0, 0)$ のとき

$$\det(H(z)(0, 0)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

となりますから，$(0, 0)$ では極大でも極小でもないことが分かります．

(b) $(x,y)=(-\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ のとき

$$\det(H(z)(-\frac{1}{6},\frac{1}{12}))=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=1>0,\quad z_{xx}(-\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-1<0$$

から，$(-\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ では極大であることが分かります.

(6) $f(x,y)$ の偏導関数は

$$\begin{aligned}f_x &= 2(x^2+y^2)\cdot 2x-4x=4x(x^2+y^2-1)\\ f_y &= 2(x^2+y^2)\cdot 2y-4x=4y(x^2+y^2+1)\end{aligned}$$

と計算されます。このことから

$$\begin{aligned}&f_x=0\Leftrightarrow (x=0)\text{ OR }(x^2+y^2=1)\\ &f_y=0\Leftrightarrow y=0\end{aligned}$$

が従いますので

$$\begin{aligned}f_x=f_y=0 &\Leftrightarrow (x=y=0)\text{ OR }(x^2+y^2=1,\ \text{AND } y=0)\\ &\Leftrightarrow (x,y)=(0,0),\ (\pm 1,0)\end{aligned}$$

が分かります。以上で f の停留点は $(0,0),\ (1,0),\ (-1,0)$ の 3 点であることが示されました。

さらに 2 階の偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned}f_{xx} &= 4(x^2+y^2-1)+4x\cdot 2x=4(3x^2+y^2-1)\\ f_{xy} &= 8xy\\ f_{xy} &= 4(x^2+y^2+1)+4y\cdot 2y=4(x^2+3y^2+1)\end{aligned}$$

となります。

(i) $(x,y)=(0,0)$ において Hesse 行列式は

$$\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-16<0$$

となりますから、$(0,0)$ において f は極大でも極小でもありません。

(ii) $(x,y)=(\pm 1,0)$ において Hesse 行列式は

$$\begin{vmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{vmatrix}=64>0$$

で、さらに $f_{xx}(\pm 1,0)=8>0$ も成立しますから、$(\pm 1,0)$ において f は極小であることが分かります。

(7) （コアテキストの 282 ページの例 8.18）

z の偏導関数は

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6y=0\cdots(1)\\ z_y=3y^2+6x=0\cdots(2)\end{cases}$$

と計算されます．(2) から $x=-\frac{1}{2}y^2$ を得ますが, これを (1) から得られる $y=-\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}y^2\right)^2=-\frac{1}{8}y^4$$

が導かれます．従って

$$y(y^3+8)=0$$

から $y=0$ または $y=-2$ であることが必要条件であることが分かります．このとき

(i) $y=0$ のとき (2) に代入して $x=0$
(ii) $y=-2$ のとき (2) から $x=-2$ を得る．

を得ます．以上で停留点は

$$(x,y)=(0,0)\text{または}(-2,-2)$$

であることが示されました．

$$z_{xx}=6x, z_{xy}=z_{yx}=6, z_{yy}=6y$$

から

$$D=\det(H(f))=z_{xx}z_{yy}-{z_{xy}}^2=(6x)(6y)-6^2=6^2(xy-1)$$

となります．各停留点について，D の符号を調べると以下のようになります．

(i) $(0,0)$ のとき $D=6^2(-1)<0$ から $(0,0)$ では極大値, 極小値を取りません．
(ii) $(-2,-2)$ のとき $D=6^2((-2)(-2)-1)=6^2\cdot 3>0$

$$z_{xx}(-2,-2)=6(-2)=-12<0$$

ですから $(-2,-2)$ で極大値をとることが分ります．

II $\alpha,\beta>0$, $\rho>0$ を定数として CES 関数を

$$Y=F(K,L)=(\alpha K^\rho+\beta L^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \tag{2}$$

と定義します．**(1)** $\log F(K,L)$ を K, L で微分して $F_K(K,L)$, $F_L(K,L)$ を求めましょう．
(2) $F(K,L)$ が Euler の等式

$$K\cdot F_K(K,L)+L\cdot F_L(K,L)=F(K,L) \tag{3}$$

を満たすことを示しましょう．

解答 (1)

$$\log F(K,L)=\frac{1}{\sigma}\cdot\log\left(\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma\right)$$

の両辺を K, L で偏微分すると

$$\frac{F_K(K,L)}{F(K,L)}=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\sigma\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}=\frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}$$
$$\frac{F_L(K,L)}{F(K,L)}=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\sigma\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}=\frac{\alpha L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}$$

となります．これから

$$F_K(K,L) = \frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \cdot F(K,L)$$
$$F_L(K,L) = \frac{\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \cdot F(K,L)$$

となります．

(2)(1) の最後の 2 式にそれぞれ K と L を掛けて加えると

$$K \cdot F_K(K,L) + L \cdot F_L(K,L) = \frac{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \cdot F(K,L) = F(K,L)$$

から $F(K,L)$ が Euler の等式を満たすことが分かります．

III $\alpha, \beta > 0, A > 0$ を定数として Cobb-Douglas 型関数

$$Y = F(K,L) = AK^\alpha L^\beta \tag{4}$$

と定義します．

(1) F_{KK}, F_{KL}, F_{LK}, F_{LL} を求めましょう．

(2) 第 1 象限のすべての点 $(K,L) \in \mathbf{R}^2_{++}$ に対して

$$F_{KK}(K,L) < 0, \text{ かつ } \det(H(F)(K,L) > 0 \tag{5}$$

を満たす α, β の条件を求めましょう．

解答 (1)

$$F_K(K,L) = \alpha \cdot AK^{\alpha-1}L^\beta, \quad F_L(K,L) = \beta \cdot AK^\alpha L^{\beta-1}$$

から

$$F_{KK}(K,L) = \alpha(\alpha-1) \cdot AK^{\alpha-2}L^\beta$$
$$F_{KL}(K,L) = \alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1}$$
$$F_{LK}(K,L) = \alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1}$$
$$F_{LL}(K,L) = \beta(\beta-1) \cdot AK^\alpha L^{\beta-2}$$

となります．一般論で成立することが分かっていますが，$F_{KL} = F_{LK}$ に注意しましょう．

(2) $\alpha \cdot AK^{\alpha-2}L^\beta > 0$ から

$$F_{KK}(K,L) < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

が分かります．次に

$$\begin{aligned}
\det(H(F)(K,L)) &= F_{KK}(K,L) \cdot F_{LL}(K,L) - F_{KL}(K,L)^2 \\
&= \alpha(\alpha-1) \cdot AK^{\alpha-2}L^\beta \cdot \beta(\beta-1) \cdot AK^\alpha L^{\beta-2} - \left(\alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1}\right)^2 \\
&= A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}\left\{\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1) - \alpha^2\beta^2\right\} \\
&= A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}\alpha\beta(1-\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

となります．$= A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2} > 0$, $\alpha\beta > 0$ から

$$\det(H(F)(K,L)) \Leftrightarrow \alpha+\beta<1$$

が分かります．以上で求める条件は

$$\alpha<1, \quad \alpha+\beta<1$$

であることが分かります．この条件は

$$\alpha<1, \quad \beta<1, \quad \alpha+\beta<1$$

と必要十分であることにも注意しましょう．