x^2+xy+y^2

$x^2+3xy+y^2-1=0$

CalcNT 2019w
Lec 04

I

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \xi-\eta \\ \xi+\eta \end{pmatrix}$$

から　$x+y=\sqrt{2}\,\xi$, $xy=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)$ となるので

$$x^2+3xy+y^2 = (x+y)^2+xy$$

xとyの対称式

$$= 2\xi^2+\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)$$
$$= \frac{5}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\eta^2$$

となる. よって曲線は回転座標変換で

$$\frac{5}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\eta^2=1$$

と表される.

$A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & e \end{pmatrix}$ 対称行列.

II

$$\left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} ax+cy \\ cx+ey \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= x(ax+cy)+y(cx+ey)$$

$$= ax^2+2cxy+ey^2$$

x, yの2次斉次式.

$${}^tA = \begin{pmatrix} \boxed{a \quad c} \\ \boxed{c \quad e} \end{pmatrix} = A$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2+xy+y^2$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2+3xy+y^2$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & p & g \\ p & e & h \\ g & h & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = ax^2+ey^2+cz^2$$
$$+2pxy+2gxz+2hyz$$

$$\begin{array}{c|c} & x \quad y \quad z \\ \hline \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \boxed{} \end{array}$$

$x^2 + xy + y^2$

$x^2 + 3xy + y^2 - 1 = 0$

I

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi - \eta \\ \xi + \eta \end{pmatrix}$$

から $x + y = \sqrt{2}\,\xi,\ xy = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$ となるので

$$x^2 + 3xy + y^2 = (x+y)^2 + xy$$

x, y の 2次形式

$$= 2\xi^2 + \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$$

$$= \frac{5}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2$$

となる. よって曲線は回転座標変換で

$$\frac{5}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 = 1$$

と表される.

II

$$\left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} ax + cy \\ cx + ey \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

$$= x(ax + cy) + y(cx + ey)$$

$\begin{pmatrix} a & c \\ c & e \end{pmatrix}$ の 2次形式.

$$= ax^2 + 2cxy + ey^2$$ ← 2次同次式

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & e \end{pmatrix}$ 対称行列. ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ c & e \end{pmatrix} = A$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x^2 + xy + y^2$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x^2 + 3xy + y^2$$

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & & & \\ y & & & \\ z & & & \end{array}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & p & q \\ p & e & r \\ q & r & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = ax^2 + ey^2 + cz^2$$

$$+ 2pxy + 2qxz + 2ryz.$$

$\alpha, \beta > 0$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$$

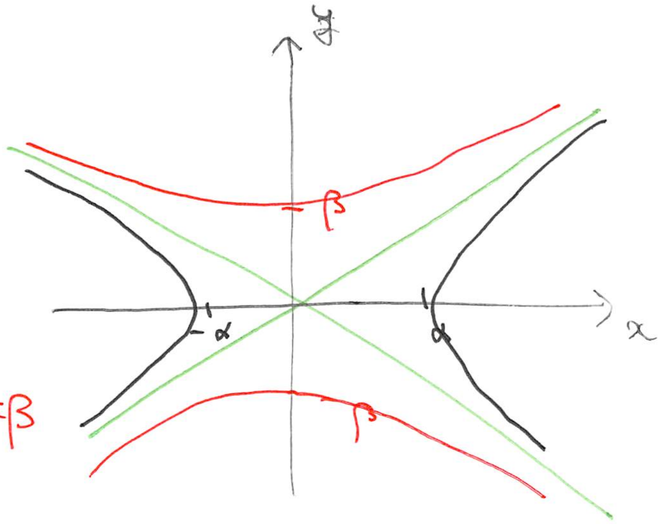
$\underbrace{=0}$

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2$$

$$\rightsquigarrow \quad y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$$

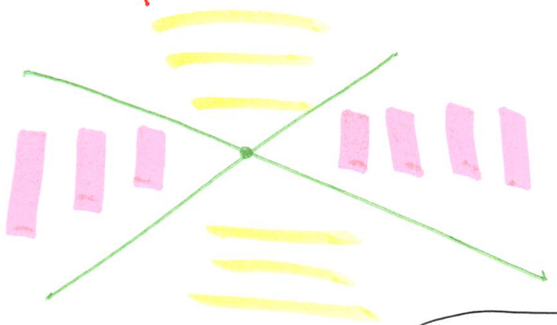
$\underbrace{=1}$ $\quad y = 0$ αρα

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \rightsquigarrow x = \pm \alpha$$



$= -1 \quad x = 0$

$$-\frac{y^2}{\beta^2} = -1 \rightsquigarrow y = \pm \beta$$



$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} > 0$$

$$" \quad \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right)$$

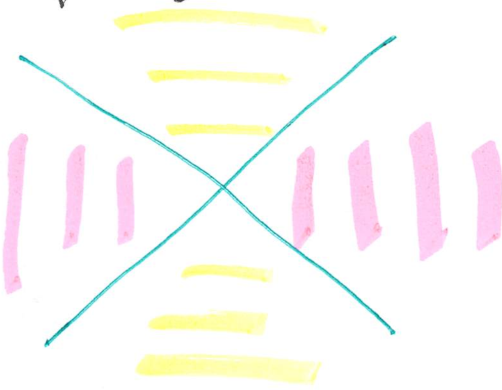
$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}} < 0$$

$\alpha, \beta > 0.$

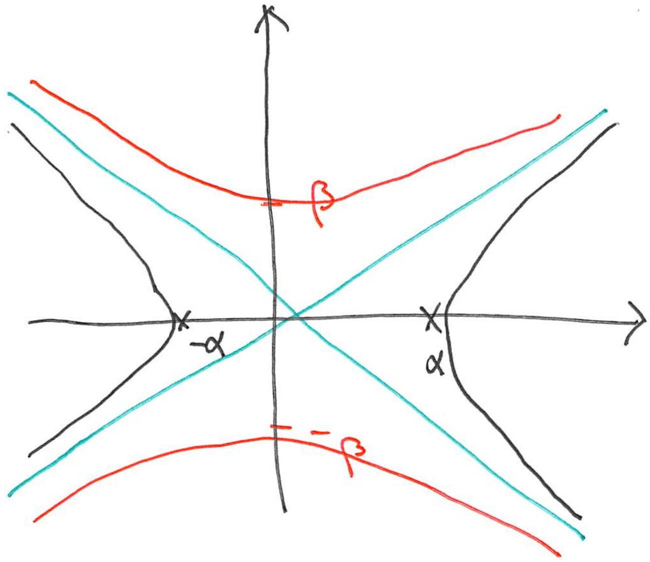
$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad 0 \quad -1$$

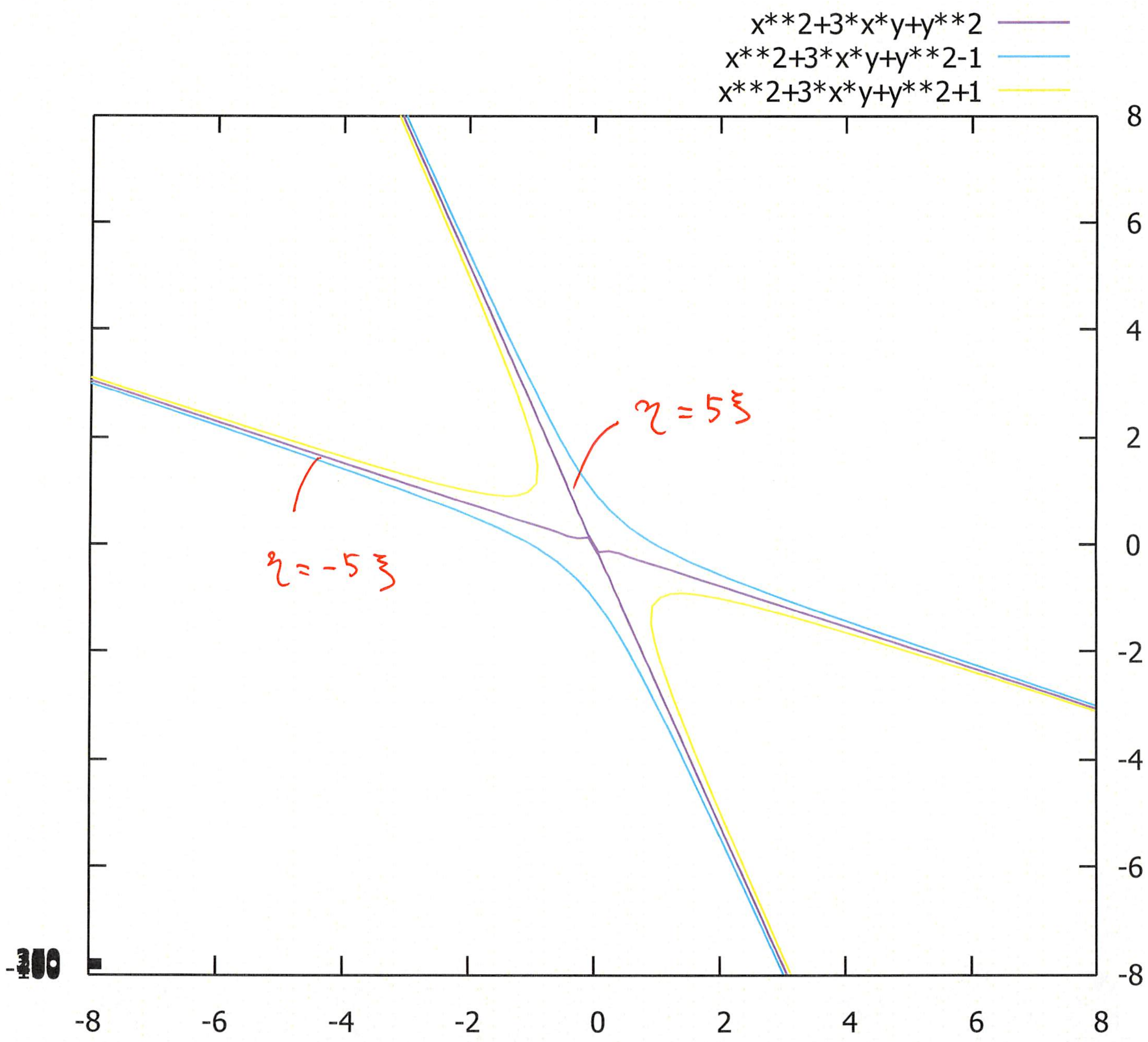
$$\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right) \overset{0}{=} \quad y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x.$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} < 0$$



$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} > 0$$




x**2+3*x*y+y**2
x**2+3*x*y+y**2-1
x**2+3*x*y+y**2+1
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
η = 5ξ
η = -5ξ

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ とする.

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + xy + y^2$$

$\vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A\vec{r}_1 = \frac{3}{2}\vec{r}_1$$

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A\vec{r}_2 = \frac{1}{2}\vec{r}_2$$

$R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$ とおくと

$$AR = (A\vec{r}_1\ \ A\vec{r}_2) = \left(\boxed{\tfrac{3}{2}\vec{r}_1}\ \boxed{\tfrac{1}{2}\vec{r}_2}\right)$$

$$= (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Rは正則なので

(・回転行列は正則

$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$

$R_\theta R_{-\theta} = I_2$ $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$)

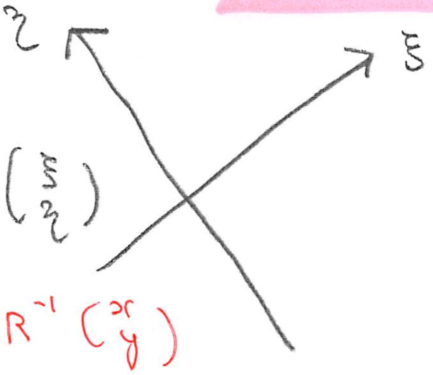
$AR = R\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

R^{-1}・

$$R^{-1}AR = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{R^{-1}R}$$

対角化.

回転座標変換



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi\vec{r}_1 + \eta\vec{r}_2 = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

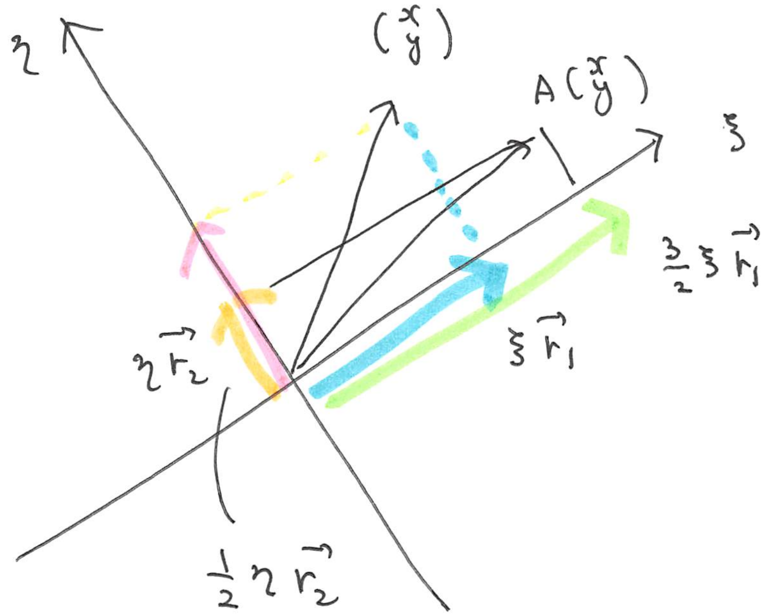
を用いる

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = R^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R^{-1}AR\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\xi \\ \frac{1}{2}\eta \end{pmatrix}$$

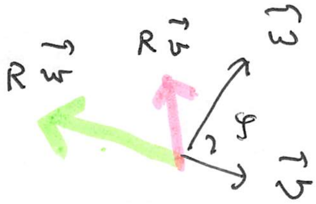


η
$\binom{x}{y}$
$A\binom{x}{y}$
ξ
$\frac{3}{2}\xi\vec{r_1}$
$\eta\vec{r_2}$
$\xi\vec{r_1}$
$\frac{1}{2}\eta\vec{r_2}$

$\Phi \quad \varphi \qquad F \quad J$

ϕ

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \varphi$$



$$(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos\varphi$$

Φ φ F f.

R 回転のとき　$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$

$$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$$

R^{-1}も回転なので

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \left(R^{-1}A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(R^{-1}A \underbrace{R \cdot R^{-1}}_{= I_2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) = \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 .$$

問　$A = \begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$ の場合に同様の計算を行う.

関数の凹凸と２階微分

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2018 年 5 月 (emath2018)

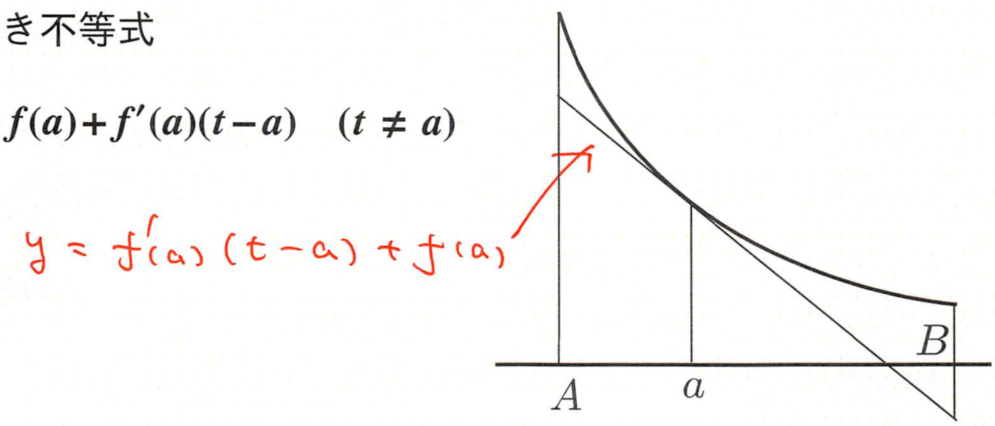
1 変数の場合

定理

- 開区間 (A, B) 上の C^2 級関数 $f:\ (A, B) \longrightarrow \mathbf{R}$
- 前提：$f''(t) > 0 \quad (t \in (A, B))$

このとき不等式

$$f(t) > f(a) + f'(a)(t - a) \quad (t \neq a)$$



証明（その１）

- $F(t) := f(t) - f(a) - f'(a)(t-a)$ とする。
- $F'(t) = f'(t) - f'(a), \quad F''(t) = f''(t) > 0$
- $G'(t) > 0\ (t \in (A,B))$ とすると
  $$A < s < t < B \Rightarrow G(s) < G(t)$$
- これを用いると $A < s < a < t < B \Rightarrow F'(s) < F'(a) = 0 < F'(t)$
- 増減表

t		a	
F'	$-$	0	$+$
F	$\searrow$	0	$\nearrow$

から $F(t) > 0 \quad (t \neq a)$

別の証明（Taylor の定理を用いる）

- $t \neq a$ とする。Taylor の定理を用いると
- $f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{1}{2}f''(c)(t-a)^2$
  を満たす c が t と a の間に存在する
- このとき $f''(c) > 0$ と $(t-a)^2 > 0$ から

$$f(t) > f(a) + f'(a)(t-a)$$

応用（極大・極小の判定）

定理

- C^2 級の関数 $f:(A,B)\to\mathbf{R}$
- $t=a\in(A,B)$ において $f'(a)=0$, $f''(a)>0$ (resp. $f''(a)<0$) とする。
- このとき f は $t=a$ で極小（resp. 極大）

（証明の準備）

$G:(A,B)\to\mathbf{R}$ が連続とする。また $a\in(A,B)$ において $G(a)>0$ とする。このとき, ある正数 $\delta>0$ に対して

$$G(t)>0 \quad (t\in(a-\delta,a+\delta))$$

証明

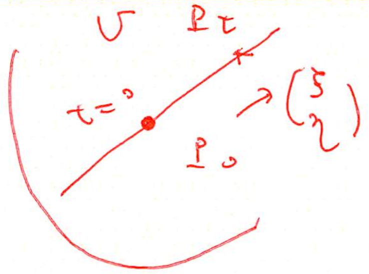
- $f''(t)$ が連続であるので、ある正数 $\delta>0$ に対して

$$f''(t)>0 \quad (a-\delta<t<a+\delta)$$

- このとき、定理を区間 $(a-\delta,a+\delta)$ において用いると $t\neq a$ を満たす $t\in(a-\delta,a+\delta)$ に対して

$$f(t)>f(a)+f'(a)(t-a)=f(a)$$

2 変数の場合



- $\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数 $f:\ U \to \mathbf{R}$ を考える。
- $P_0(a,b) \in U$、${}^t(\xi\ \eta) \neq \vec{0}$ に対して
  $F(t) = f(\boxed{a + t\xi, b + t\eta})$ P_t
- （Chain Rule） $G(t) = f(x(t), y(t))$ に対して
  $G'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$
- $F'(t) = f_x(P_t)\cdot\xi + f_y(P_t)\cdot\eta$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \xi\left(f_{xx}\xi + f_{xy}\eta\right) + \eta\left(f_{yx}\xi + f_{yy}\eta\right) \\ &= f_{xx}\xi^2 + 2f_{xy}\xi\eta + f_{yy}\eta^2 \end{aligned}$$

by Young

(P_t) $(f_x)_x = f_{xx}$, $(f_x)_y = f_{xy}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \|$
$\qquad\quad (f_y)_x = f_{yx}$

Hesse 行列

$\left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = ax^2 + 2cxy + ey^2$

- $P \in U$ に対して Hesse 行列

by Young

$$H(f)(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & \boxed{f_{xy}(P)} \\ \boxed{f_{yx}(P)} & f_{yy}(P) \end{pmatrix} \leftarrow \text{対称行列.}$$

- f が C^2 のとき $f_{xy} = f_{yx}$ ですから H は対称行列
- $F(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ に対して

$$F''(t) = \left(H(f)(P_t)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$

$F''(t) > 0$ という条件を考える.
$<$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$\left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) > 0 \qquad \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad a > 0, \quad |A| = ab - c^2 > 0$$

$\Longleftarrow$

$$a\xi^2 + 2c\xi\eta + b\eta^2$$

ξについて平方完成

completing the square.

$$= a\left(\xi + \frac{c}{a}\eta\right)^2 + b\eta^2 - \frac{c^2}{a}\eta^2$$

$$= \underbrace{\underset{\vee\atop 0}{a}\left(\xi + \frac{c}{a}\eta\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\overset{\wedge\atop 0}{ab - c^2}}{\underset{\vee\atop 0}{a}}\eta^2}_{\geq 0} \;\overset{>}{=}\; 0.$$

$\Updownarrow$

$p, q \geq 0$ のとき

$p + q = 0 \Rightarrow p = q = 0$

$$a\left(\xi + \frac{c}{a}\eta\right)^2 = 0$$

$$\frac{ab - c^2}{a}\eta^2 = 0) \Leftrightarrow \eta = 0$$

$\Updownarrow$

$$\xi = \eta = 0$$

$\Rightarrow$ は La Semeine Prochaine

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$　　$B = \lambda I_2 - A$ とする

1) $|B| = 0$ を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ を求める.

2) 1) の λ (2個ある) に対して

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を解く.