## 2019年10月16日微分積分演習問題

**I** 次の行列の積を計算しましょう.

**(1)** $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

**(3)** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

**(6)** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(7)** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(8)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**(9)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(10)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(11)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**解答 (1)**

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix}$$

**(2)**

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

**(3)**

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\lambda y \\ y \end{pmatrix}$$

**(4)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x + y \end{pmatrix}$$

**(5)**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

**(6)**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix}$$

**(7)**

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**(8)**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**(9)**

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$i.e.\quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \lambda\vec{a}+\vec{b})$$

**(10)**

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$i.e.\quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda\vec{a}\ \vec{b})$$

**(11)**

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$i.e.\quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b}\ \vec{a})$$

**II** 次の行列の逆行列を求めましょう.

**(1)** $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**(4)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ **(5)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(6)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **(7)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

解答

**(1)** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ から

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります.

**(2)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

**(3)** $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \lambda = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

**(4)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \lambda \cdot 0 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

**(5)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

**(6)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

**(7)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

**III** 以下の函数に対して 2 階の偏導関数 $z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$ を求めましょう.

**(1)** $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$

**(2)** $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

**(3)** $z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$

**(4)** $z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$

**(5)** $z = x^3 - xy - y^2$

**(6)** 削除

**(7)** $z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$

**(8)** $z = x^3 + y^3 + 6xy$

**(1)**

$$\begin{cases} z_x &= 2x+y-4 \\ z_y &= x+2y-8 \end{cases}$$

となります．

$$z_{xx}=2,\ z_{xy}=z_{yx}=1,\ z_{yy}=2$$

と計算されます．

**(2)**

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2-9y \\ z_y &= 3y^2-9x \end{cases}$$

となります．さらに

$$z_{xx}=6x,\ z_{xy}=z_{yx}=-9,\ z_{yy}=6y$$

となります．

**(3)**

$$\begin{cases} z_x &= 2x+y-4 \\ z_y &= x-2y-2 \end{cases}$$

となります．さらに

$$z_{xx}=2,\ z_{xy}=z_{yx}=1,\ z_{yy}=-2$$

**(4)**

$$\begin{cases} z_x &= 2x+4y-6 \\ z_y &= 4x+4y-8 \end{cases}$$

となります．さらに

$$z_{xx}=2,\ z_{xy}=z_{yx}=4,\ z_{yy}=4$$

と計算されます．

**(5)**

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2-y \\ z_y &= -x-2y \end{cases}$$

となります．さらに

$$z_{xx}=6x,\ z_{xy}=z_{yx}=-1,\ z_{yy}=-2$$

と計算されます．

**(7)** $f(x,y)$ の偏導関数は

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x^2+y^2)\cdot 2x-4x=4x(x^2+y^2-1) \\ f_y &= 2(x^2+y^2)\cdot 2y-4x=4y(x^2+y^2+1) \end{aligned}$$

と計算されます．さらに 2 階の偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned} & f_{xx}=4(x^2+y^2-1)+4x\cdot 2x=4(3x^2+y^2-1) \\ & f_{xy}=8xy \\ & f_{xy}=4(x^2+y^2+1)+4y\cdot 2y=4(x^2+3y^2+1) \end{aligned}$$

となります．

**(8)** （コアテキストの 282 ページの例 8.18）

$z$ の偏導関数は

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6y \\ z_y=3y^2+6x \end{cases}$$

と計算されます．さらに

$$z_{xx}=6x, z_{xy}=z_{yx}=6, z_{yy}=6y$$

となります．

**IV** 曲線 $x^2+xy+y^2-x+2y=0$ が回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ によっていかなる式で表されるか考えましょう．

**解答**

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{cases}$$

から

$$x+y=\sqrt{2}X,\quad xy=\frac{1}{2}(X^2-Y^2)$$

となります．これから

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2-x+2y &= 2X^2-\frac{1}{2}(X^2-Y^2) \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ &= \frac{3}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{3}{\sqrt{2}}X \end{aligned}$$

**IV** 曲線 $x^2+3xy+y^2-1=0$ が回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ によっていかなる式で表されるか考えましょう．

解答

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{cases}$$

から

$$x+y=\sqrt{2}X, \quad xy=\frac{1}{2}(X^2-Y^2)$$

となります．これから

$$\begin{aligned} x^2+3xy+y^2-1 &= 2X^2+\frac{1}{2}(X^2-Y^2)-1 \\ &= \frac{5}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2-1 \end{aligned}$$

となります．

**V** 以下の関数が第 1 象限 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上で Euler 方程式を満たすことを示しましょう．
**(1)** $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, **(2)** $u(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

解答 **(1)**

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ u_y &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

となりますから

$$\begin{aligned} xu_x+yu_y &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = u \end{aligned}$$

となりますから $u(x,y)$ は Euler の等式を満たすことが分かります．

**(2)**

$$u_x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad u_y=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

から

$$\begin{aligned} xu_x+yu_y &= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \\ &= x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = u \end{aligned}$$

となりますから $u(x,y)$ は Euler の等式を満たすことが分かります．