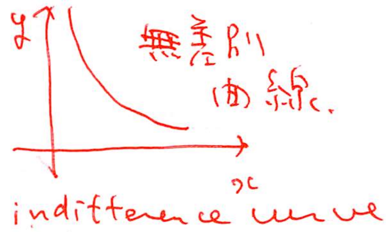
$u(x,y) = C x^{\alpha} y^{\beta}$　　$\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta \leq 1$　　$g(x,y) = 0$



I　$g(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} - 1$ とすると

$$g_x = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}, \quad g_y = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{2}{3}}$$

$g_x(1,1) = \frac{1}{2}$, $g_y(1,1) = \frac{1}{3}$ なので求める接線の方程式は

$$\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) = 0$$

II　$g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ とすると

$$g_x = 2x + y, \quad g_y = x + 2y$$

となる. $g_x(1,0) = 2$, $g_y(1,0) = 1$ なので求める接線の方程式は

$$2(x-1) + y = 0$$

III　
$$\begin{cases} x - y = 1 - z \\ 2x + y = -1 - z \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$$

とする. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ からクラメールが使えて

$$x = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ -1-z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\{(1-z) - (1+z)\} = -\frac{2}{3} z$$

$$y = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & -1-z \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-1-z-2(1-z)) = \frac{1}{3}(z-3)$$

$z = 3$, $y = 0$, $x = -2$; $z = 0$, $x = 0$, $y = -1$

I　$g(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} - 1$ とすると

$$g_x = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}, \quad g_y = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{2}{3}}$$

$g_x(1,1) = \frac{1}{2}$, $g_y(1,1) = \frac{1}{3}$ なので求める接線の方程式は

$$\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) = 0$$

II　$g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ とすると

$$g_x = 2x + y, \quad g_y = x + 2y$$

となる。$g_x(1,0) = 2$, $g_y(1,0) = 1$ なので求める接線の方程式は

$$2(x-1) + y = 0$$

III　$\begin{cases} x - y = 1 - z \\ 2x + y = -1 - z \end{cases}$　　$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$

とする。$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ からクラメールが使えて

$$x = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ -1-z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\{(1-z) - (1+z)\} = -\frac{2}{3} z$$

$$y = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & -1-z \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-1-z-2(1-z)) = \frac{1}{3}(z-3)$$

$x = 0$, $y = -1$, $z = 0$ は1つの解.

$u(x, y) = A\, x^{\alpha} y^{\beta}$ （A 定数） $\alpha, \beta > 0$

$\alpha + \beta \leq 1$

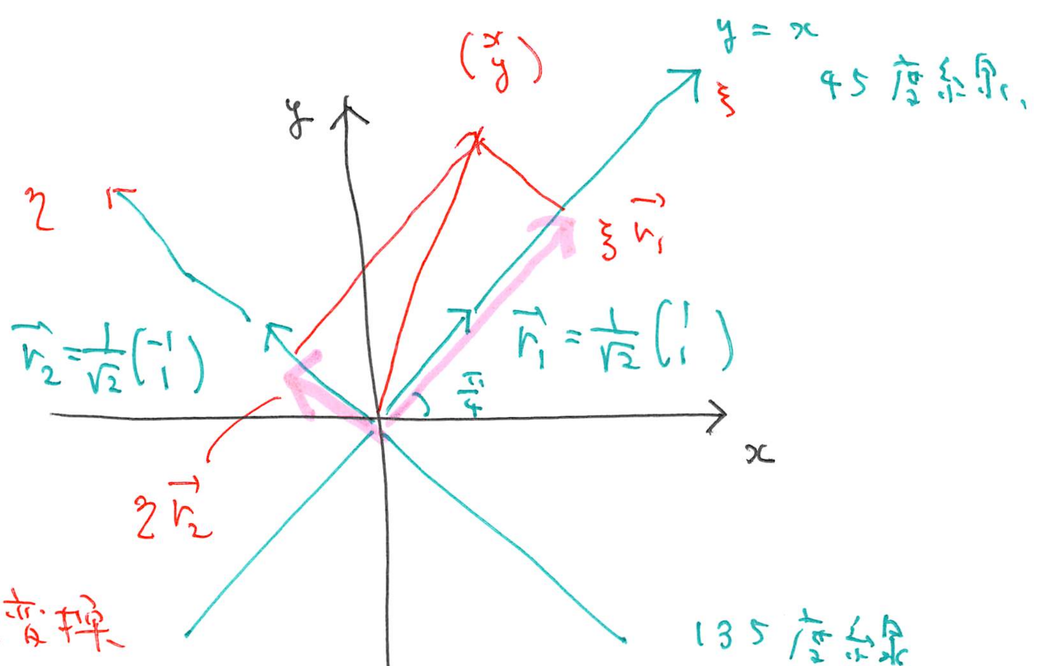
Cobb-Douglas 型.

$u(x, y) = C$

無差別曲線

indifference curve.

$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$



回転座標変換

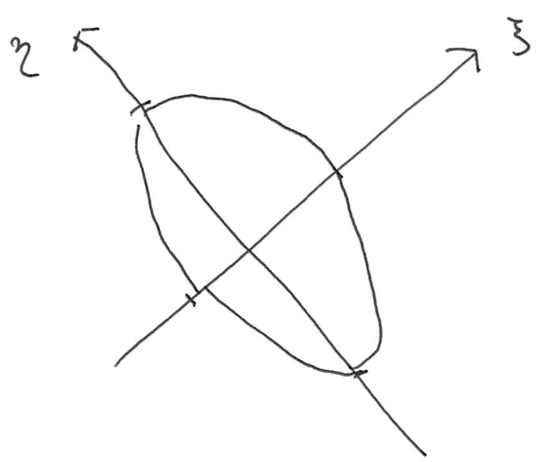
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2$$

$$= (\vec{r}_1 \ \ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}_{= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}}}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \xi - \eta \\ \xi + \eta \end{pmatrix}$$

$$x + y = \sqrt{2}\,\xi, \quad xy = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$$

$$\begin{aligned} & x^2 + xy + y^2 \\ &= (x+y)^2 - xy \\ &= 2\xi^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) = \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 = 1 \end{aligned}$$

$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$



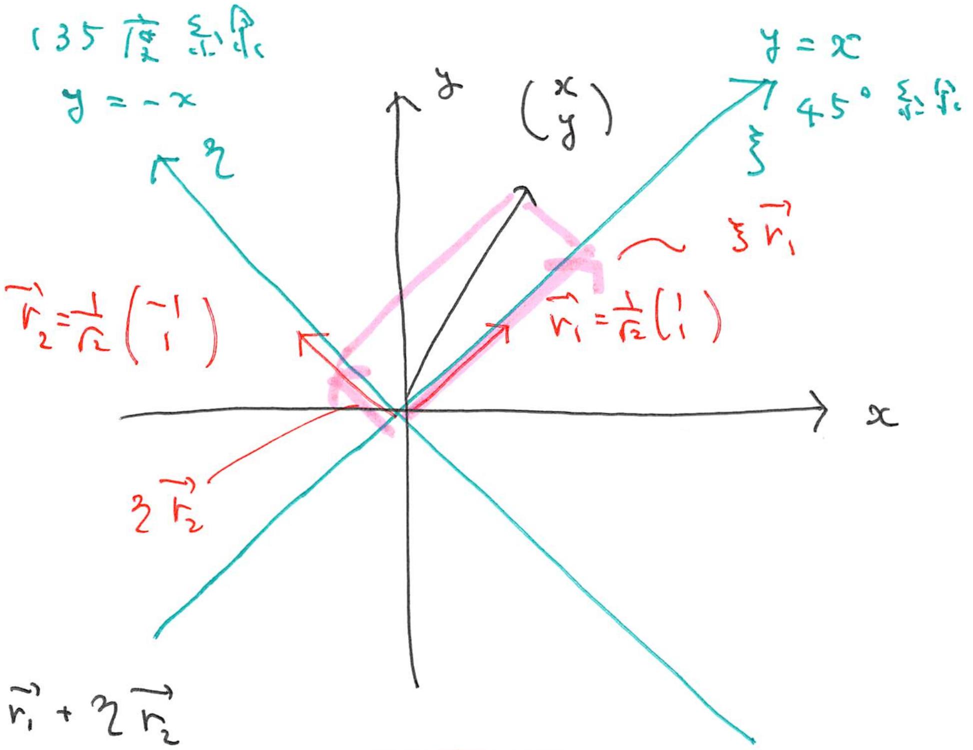
$\xi^2 = \frac{2}{3}$

$\xi = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\eta^2 = 2$

$\eta = \pm\sqrt{2}$

$$g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{r_1} + \eta \vec{r_2}$$

$$= (\vec{r_1}\ \vec{r_2}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi - \eta \\ \xi + \eta \end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

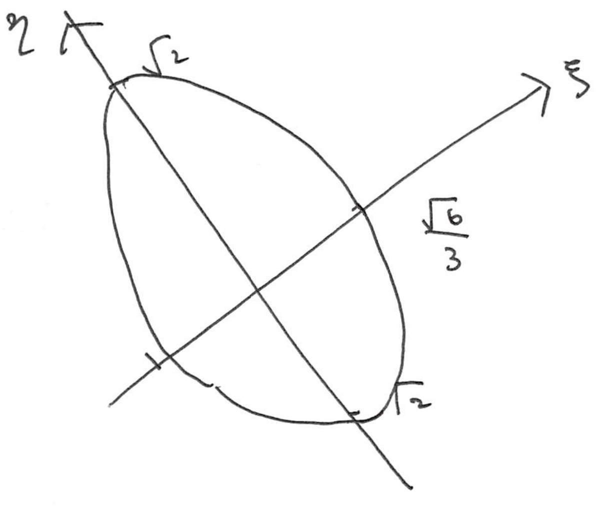
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}}$$

$$x + y = \sqrt{2}\,\xi, \quad xy = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$$

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = (x+y)^2 - xy$$

$$= 2\xi^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$$

$$= \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 = 1$$



$\eta = 0$ のとき $\xi^2 = \frac{2}{3}$

$\xi = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\xi = 0$ のとき $\eta^2 = 2$

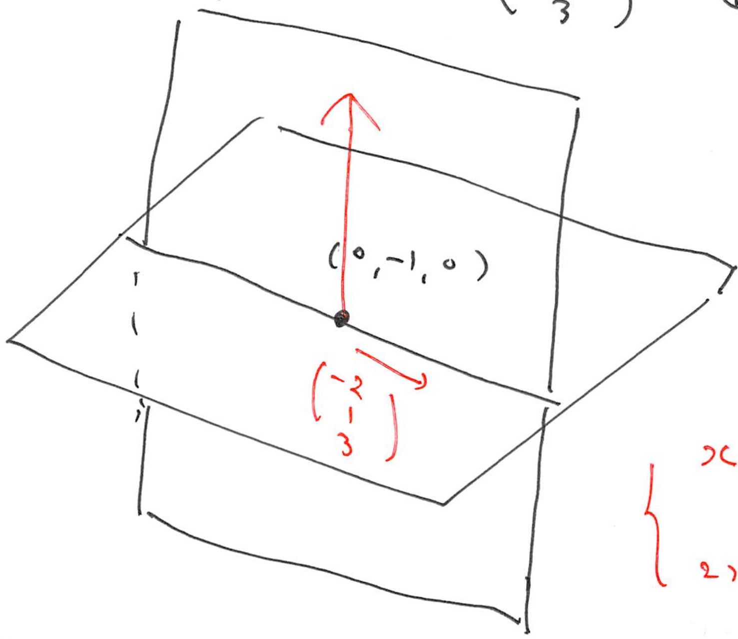
$\eta = \pm\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}(z-3) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑ $z=0$ で通る.

$$= \frac{1}{3}z\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(0,-1,0)$ を通って 方向ベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の直線



$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 法線ベクトル

↑

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$$

↓

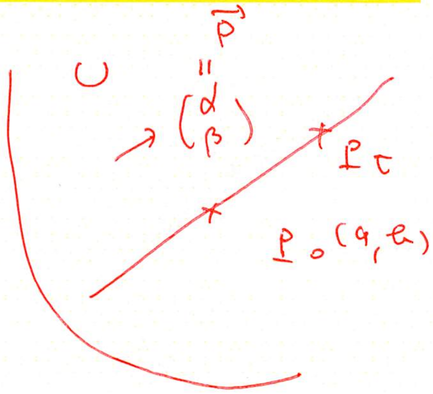
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

外積と関係している.

まとめ

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$



$$F(t) := f(a + t\alpha, b + t\beta)$$

に対して $\mathrm{P}_t(a + t\alpha, b + t\beta)$, $\vec{p} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ と定めると

$$F'(t) = \alpha f_x(\mathrm{P}_t) + \beta f_y(\mathrm{P}_t) = \left(\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}f_x(\mathrm{P}_t)\\f_y(\mathrm{P}_t)\end{pmatrix}\right) = (\vec{p}, \nabla(f)(\mathrm{P}_t))$$

nabla.

発展（重要な応用）

$$F'(t) = \alpha f_x(a + t\alpha, b + t\beta) + \beta f_x(a + t\alpha, b + t\beta)$$

y

の両辺を t で微分する．ここで 2 階の偏微分

$$f_{xx} = (f_x)_x\,,\ f_{xy} = (f_x)_y\,,\ f_{yx} = (f_y)_x\,,\ f_{yy} = (f_y)_y$$

を定義する．実は **Young** の定理によって

$$f_{xy} = f_{yx}$$

が成立することに注意しよう．これを用いると

$$\begin{aligned}F''(t) &= \alpha^2 f_{xx}(P_t) + 2\alpha\beta f_{xy}(P_t) + \beta^2 f_{yy}(P_t)\\ &= \left(\begin{pmatrix}f_{xx}(P_t) & f_{xy}(P_t)\\ f_{yx}(P_t) & f_{yy}(P_t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y \qquad f_{xx} = (f_x)_x$$

1 Youngの定理. $\qquad f_{yy} = (f_y)_y$

$$f_{yx} = (f_y)_x$$

$$F''(t) = \alpha\left(\alpha f_{xx}(P_t) + \beta f_{xy}(P_t)\right)$$
$$+ \beta\left(\alpha f_{yx}(P_t) + \beta f_{yy}(P_t)\right)$$

$$= \alpha^2 f_{xx}(P_t) + 2\alpha\beta f_{xy}(P_t) + \beta^2 f_{yy}(P_t)$$

同次関数

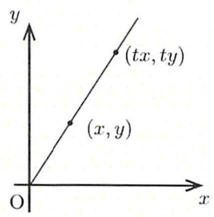
Nobuyuki TOSE

October 11, 2017
V03 October 16, 2019

同次関数–定義

$\mathbf{R}^2$ の第１象限

$$\mathbf{R}^2_{++} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x,y > 0\}$$



上で定義された関数

$$f:\ \mathbf{R}^2_{++} \to \quad \mathbf{R}$$

が与えられているとします．

$$(x,y) \in \mathbf{R}^2_{++},\ t > 0 \quad \Rightarrow (tx,ty) \in \mathbf{R}^2_{++}$$

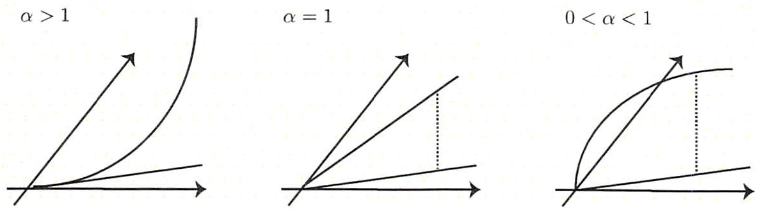
homogeneous function

に注意しましょう．f が α 次の同次関数（斉次関数）であるとは

$$f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}, t > 0)$$

が成立するときです．

同次関数 (2)



例 Cobb-Douglas 型関数

$$f(x,y) = Ax^{\alpha}y^{\beta} \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

を Cobb-Douglas 型関数と呼ぶ．生産関数，効用関数のモデルに用いることが多い．

$$(tx)^{\alpha}(ty)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}x^{\alpha}y^{\beta}$$

から Cobb-Douglas 型関数は $\alpha + \beta$ 次同次関数である．

Eulerの等式

定理

$f: \mathbf{R}^2_{++} \to \mathbf{R}$ が α 次同次関数とする．このとき

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \alpha f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

が成立する．

$(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ を止めて $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$

の両辺を t で微分すると

$$xf_x(tx,ty) + yf_y(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$$

となる．ここで $t=1$ とすると

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \alpha f(x,y)$$

となる．

Eulerの等式 (2)

定理

$f: \mathbf{R}^2_{++} \to \mathbf{R}$ が

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \alpha f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

を満たすならば，f は α 次同次関数となる．

(tx, ty)

$tx f_x(tx,ty) + ty f_y(tx,ty) = \alpha f(tx,ty)$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(t^{-\alpha} f(tx,ty)\right) \\
&= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx,ty) + t^{-\alpha}\left(xf_x(tx,ty) + yf_y(tx,ty)\right) \\
&= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx,ty) + t^{-\alpha} t^{-1}\left((tx)f_x(tx,ty) + (ty)f_y(tx,ty)\right) \\
&= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx,ty) + t^{-\alpha-1} \cdot \alpha f(tx,ty) = 0
\end{aligned}$$

から従う．

$\to$ $t^{-\alpha} f(tx,ty) = C$ (定数)

$t=1$ とおくと $f(x,y) = C$ $\to$ $t^{-\alpha} f(tx,ty) = f(x,y)$

$\to$ $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$

$$(t^{-\alpha} f(tx, ty))' \equiv 0 \quad (t > 0)$$

$$\downarrow$$

$$t^{-\alpha} f(tx, ty) \equiv C \quad (t > 0)$$

定数.

$$\downarrow$$

$t = 1$ とおくと $f(x, y) = C$

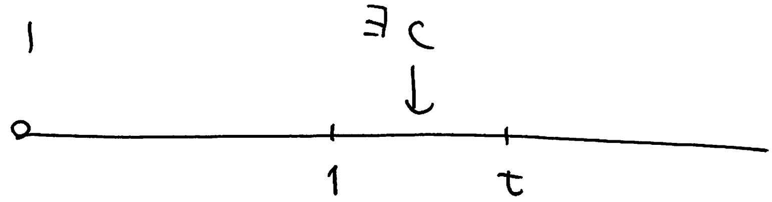
$$t^{-\alpha} f(tx, ty) = f(x, y)$$

$$\downarrow$$

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$$ Eulerの等式

$F'(t) \equiv 0 \quad (t > 0) \rightsquigarrow F(t) \equiv C$ (定数)

$t \neq 1$



$$\frac{F(t) - F(1)}{t-1} = F'(c) = 0 \quad \text{(平均値の定理)}$$

$$\rightsquigarrow F(t) = F(1)$$

I

$$x^2+3xy+y^2-1=0$$

を

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

で座標変換して示せ.

II

$$A=\begin{pmatrix}a&c\\c&b\end{pmatrix}$$ に対して

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$ を計算

内積