2019 年 10 月 9 日微分積分演習問題

I Cobb-Douglas 型生産関数

$$Q = F(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

に対して $F(10^4 + 100, 625 + (-15))$ の近似値を $K = 10^4$, $L = 625$ における MPK,MPL を用いて求めましょう．電卓でも計算してみましょう．

解答

$$F_K(K, L) = 3K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}, \quad F_L(K, L) = K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}$$

から $K = 10^4$, $L = 625 = 5^4$ において MPK, MPL が

$$\begin{aligned} MPK &= F_K(10^4, 5^4) = 3 \times \left(10^4\right)^{-\frac{1}{4}} \times \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= 3 \times 10^{-1} \times 5 = 1.5 \\ MPL &= F_L(10^4, 5^4) = \left(10^4\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(5^4\right)^{-\frac{3}{4}} \\ &= 10^3 \times 5^{-3} = 8 \end{aligned}$$

と計算されます．さらに

$$F(10^4, 5^4) = 4 \times \left(10^4\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} = 4 \times 10^3 \times 5 = 2.0 \times 10^4$$

も計算できます．以上の準備の下で $F(10^4 + 100, 5^4 + (-15))$ の近似値を求めると

$$\begin{aligned} F(10^4 + 100, 5^4 + (-15)) &\approx F(10^4, 5^4) + F_K(10^4, 5^4) \times 100 + F_L(10^4, 5^4) \times (-15) \\ &= 2.0 \times 10^4 + 1.5 \times 100 + 8 \times (-15) \\ &= 20,030 \end{aligned}$$

となります．Google Chrome で計算してみると

$$F(10^4 + 100, 5^4 + (-15)) = 20,027.81$$

となります．

II 以下の曲線 $g(x, y) = 0$ の P_0 における接線を求めましょう．

(1) $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ at $P_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$

(2) $g(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$ at $P_0(1, 1)$

(3) $g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ at $P_0(0, 1)$

解答 **(1)** $g_x = 2x$, $g_y = 8y$ から

$$g_x(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = \sqrt{2}, \quad g_y(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$$

と計算されます．従って $\mathrm{P}_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ における接線は

$$\sqrt{2}(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) + 2\sqrt{2}(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) = 0$$

となります．

(2) $g_x = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$，$g_y = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$ から

$$g_x(1,1) = \frac{1}{3}, \quad g_y(1,1) = \frac{1}{3}$$

となりますから，$\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) = 0$$

となります．

(3) $g_x = 2x - y$，$g_y = -x + 2y$ から

$$g_x(0,1) = -1, \quad g_y(0,1) = 2$$

となりますから，$\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$-1 \cdot (x-0) + 2(y-1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad -x + 2(y-1) = 0$$

となります．

III ある工場が非熟練労働 x 時間，熟練労働 y 時間を使ってある生産物を

$$Q = F(x,y) = 60x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

単位生産していて，現在 $x = 64$, $y = 27$ となっているとします．

(1) 現在の生産量を求めましょう．

(2) どの方向に (x,y) を変化させれば Q が最も増加するでしょうか？

(3) 熟練労働を 1.5 時間増加させるが，生産レベルを保つとします．非熟練労働はどのように変化させることになるか近似値を求めましょう．

解答 **(1)** $64 = 4^3, 27 = 3^3$ に注意します．すると

$$F(64,27) = 60 \times \left(4^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 60 \times 4^2 \times 3 = 2,880$$

と現在の生産量が求められます．

(2)

$$F_x = 60 \times \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{3}} = 40 \times x^{-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{3}}$$
$$F_x = 60 \times x^{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} = 20 \times x^{\frac{2}{3}} \times y^{-\frac{2}{3}}$$

から

$$F_x(64,27) = 40 \times \left(4^3\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 40 \times \frac{1}{4} \times 3 = 30$$
$$F_y(64,27) = 20 \times \left(4^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(3^3\right)^{-\frac{2}{3}} = 20 \times 4^2 \times 3^{-2} = \frac{320}{9}$$

と計算されます．これから

$$\nabla(F)(64,27) = \begin{pmatrix} 30 \\ \frac{320}{9} \end{pmatrix}$$

の方向が Q を最も増加させせる方向です．

(3) 等量曲線

$$F(x,y) = F(64,27)$$

の $(x,y) = (64,27)$ における接線

$$30(x-64) + \frac{320}{9}(y-27) = 0$$

上で近似的に考えます．熟練労働の時間を $y = 27 + 1.5$ とすると

$$\begin{aligned} x - 64 &= -\frac{320}{9} \times \frac{1}{30} \times 1.5 \\ &= -\frac{16}{9} = -1.77\ldots \end{aligned}$$

となりますから非熟練労働の時間を $1.77\ldots$ 時間減らすことになります．

IV クラメールの公式を用いて次の連立 1 次方程式を解きましょう。

(1) $\begin{cases} 2x - 3y &= 7 \\ 3x + 5y &= 1 \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} 2x - 3y &= -1 \\ 4x + 7y &= -1 \end{cases}$ **(3)** $\begin{cases} 3x + 5y &= 8 \\ 4x - 2y &= 1 \end{cases}$

解答 **(1)**

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{19} \cdot 38 = 2$$

$$y = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{19} \cdot (-19) = -1$$

(2)

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{26} \cdot (-10) = -\frac{5}{13}$$

$$y = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{26} \cdot 2 = \frac{1}{13}$$

(3)

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{26} \cdot (-21) = \frac{21}{16}$$

$$y = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{26} \cdot (-29) = \frac{26}{29}$$

V クラメールの公式を用いて

$$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x-y+z &= -1 \end{cases}$$

を満たす (x,y,z) に対して x,y を z で表しましょう。

解答

$$\begin{cases} x+y &= z+1 \\ 2x-y &= -z-1 \end{cases}$$

をクラメールの公式を用いて x,y について解くと

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} z+1 & 1 \\ -z-1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 0$$

$$y = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & z+1 \\ 2 & -z-1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(-3z-3) = z+1$$