CalcNT 2019w
L02, 10/02

I (1) $z = x^2 + xy + 2y^2$ のとき，

$$z_x = 2x + y, \quad z_y = x + 4y.$$

で $z_x(0,1) = 1$, $z_y(0,1) = 4$ となるので接平面は

$$z = x + 4(y-1) + 2 \quad = x + 4y - 2.$$

(2) $z = xy + 3x + 3y - 1$ のとき

$$z_x = y + 3, \quad z_y = x + 3$$

で $z_x(0,0) = 3$, $z_y(0,0) = 3$ となるので接平面は

$$z = 3x + 3y - 1$$

II $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

III $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$ なので $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$ なので $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

CalcNT 2019w
L02, 10/02

I (1) $z = x^2 + xy + 2y^2$ のとき.

$z_x = 2x + y$, $z_y = x + 4y$.

で $z_x(0,1) = 1$, $z_y(0,1) = 4$ となるので接平面は

$z = x + 4(y-1) + 2$ $\quad z(0,1) = 2$

$= x + 4y - 2$

(2) $z = xy + 3x + 3y - 1$ のとき

$z_x = y + 3$, $z_y = x + 3$ $\quad z(0,0) = -1$

で $z_x(0,0) = 3$, $z_y(0,0) = 3$ となるので接平面は

$z = 3x + 3y - 1$

回転

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

II $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

III $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$ なので $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$ なので $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$xy + 3x + 3y - 1 = 0$ のグラフは？

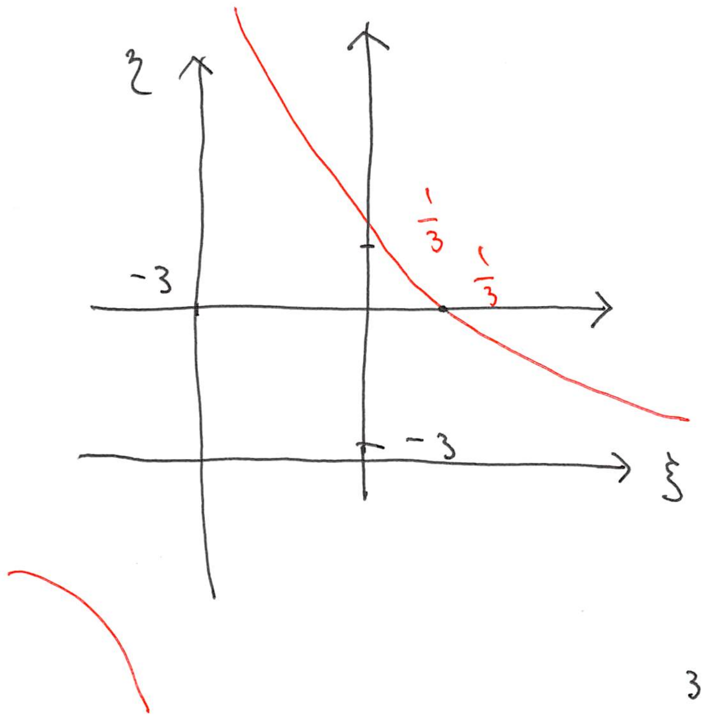
$(x+3)y + 3x - 1 = 0$ $\qquad y = \dfrac{1-3x}{x+3}$

$x = -3$ のとき、

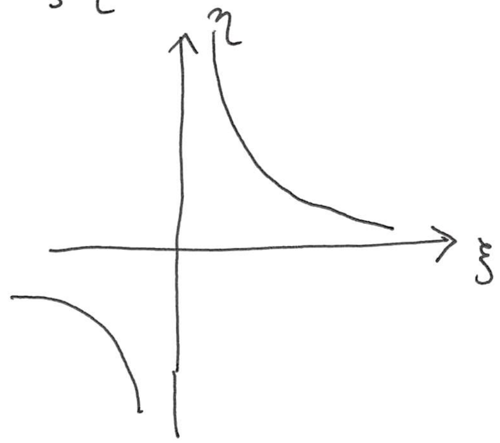
$0 \cdot y - 10 = 0$

満たす y は存在しない。

$(x+3)(y+3) - 10 = 0$



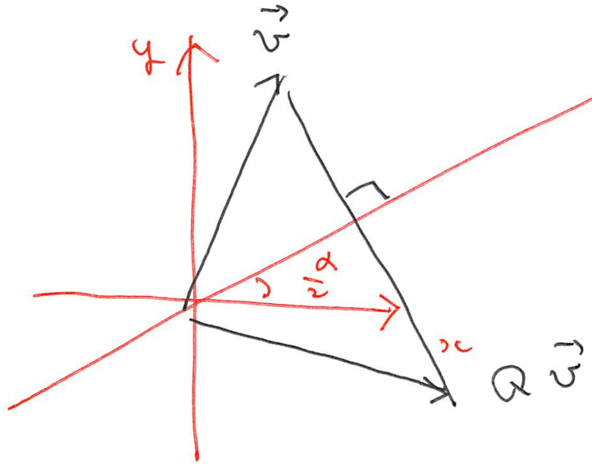
$\xi \eta = 10$



$$\begin{cases} \xi = x + 3 \\ \eta = y + 3 \end{cases}$$

$3(y+3) = 10$

$y + 3 = \dfrac{10}{3} \rightarrow y = \dfrac{1}{3}$



$$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$Q^2 = I_2$$

限界生産物（Marginal Products）

このとき $(K_0, L_0) = (10^4, 625)$ における資本の限界生産物 (MPK) と**労働**の限界生産物（**Marginal Product of Labor**）(MPL) は

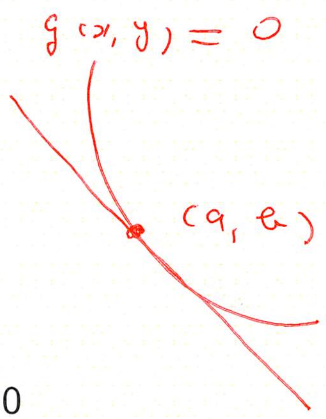
$$MPK = F_K(K_0, L_0) = \frac{3 \cdot 5}{10} = 1.5$$
$$MPL = F_L(K_0, L_0) = \frac{10^3}{5^3} = 8$$

となります．さらに $Q = F(10^4 + 100, 625) = 20,149.813\ldots$ の値の近似を

$$\begin{aligned} F(10^4 + 100, 625) &\approx F(10^4, 625) + F_K(10^4, 625) \cdot 100 \\ &= 20,000 + 1.5 \times 100 = 20,150 \end{aligned}$$

と計算します．

曲線の接線



曲線 C が 2 変数関数 g を用いて

$$g(x, y) = 0$$

と与えられているとします．例えば単位円は

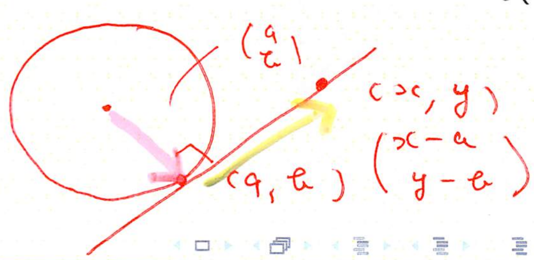
$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

と表されます．C 上の点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ が与えられているときに，C の $\mathrm{P}_0(a, b)$ における接線を求めます．

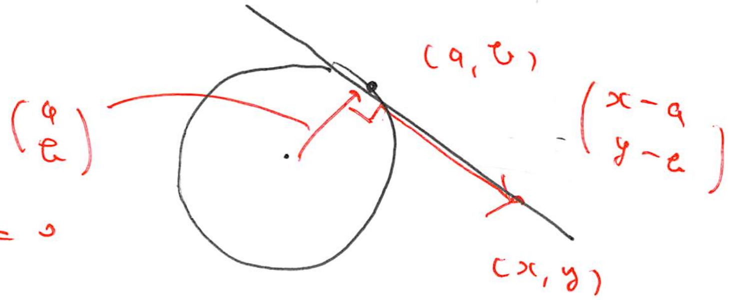
$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}=0$$

$$a(x-a)+b(y-b)=0$$

$$\rightsquigarrow\ ax+by=1$$



$$ax + by = 1$$



$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \right) = 0$$

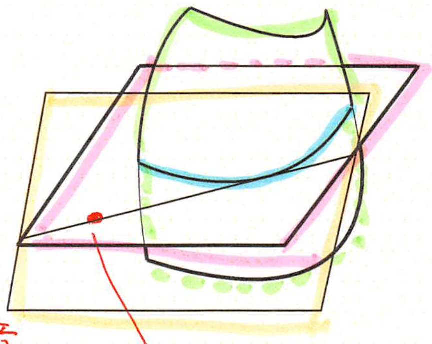
$$a(x-a) + b(y-b) = 0$$

曲線の接線–3 次元的には

曲面

$$z = g(x, y)$$

の接平面を $(a, b, 0)$ で考えると



$$z = g_x(a, b) \cdot (x - a) + g_y(a, b) \cdot (y - b) \qquad (2)$$

となります.　$g(a, b) = 0$ に注意

$(x, y, 0)$

接平面と $x - y$ 平面の交わりは $x - y$ 座標では

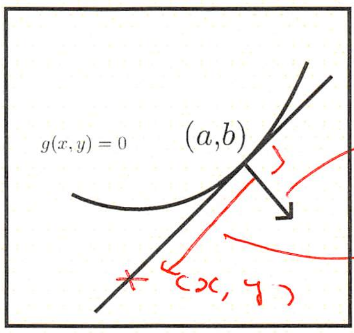
$$g_x(a, b) \cdot (x - a) + g_y(a, b) \cdot (y - b) = 0$$

となります．これは接線の方程式となります．

Gradient Vector

nabla

方程式 (2) は内積を用いて



$\nabla(g)(a, b)$

$\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = 0$$

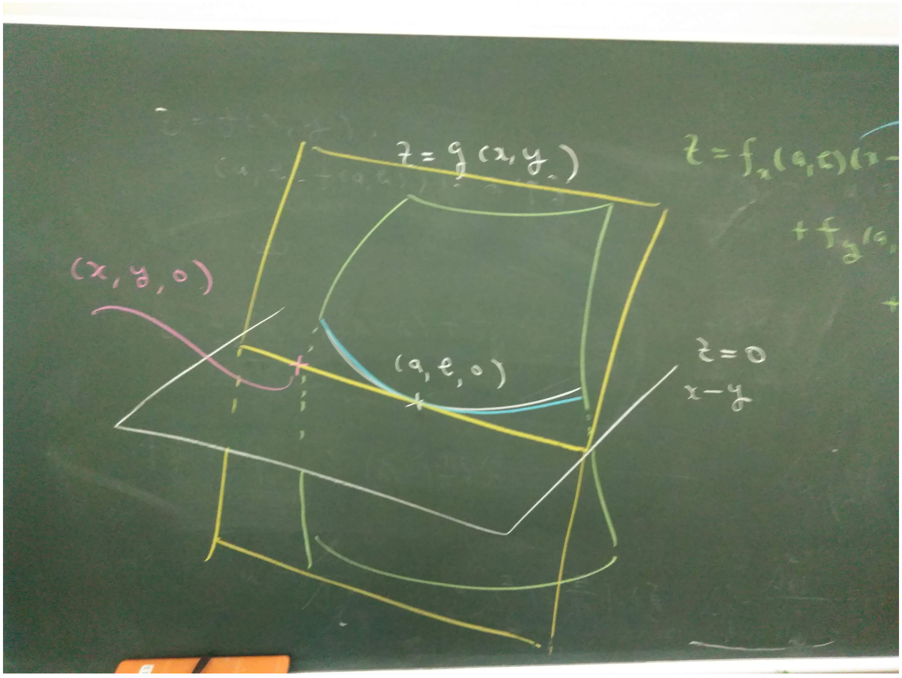
と表されます．

これからベクトル

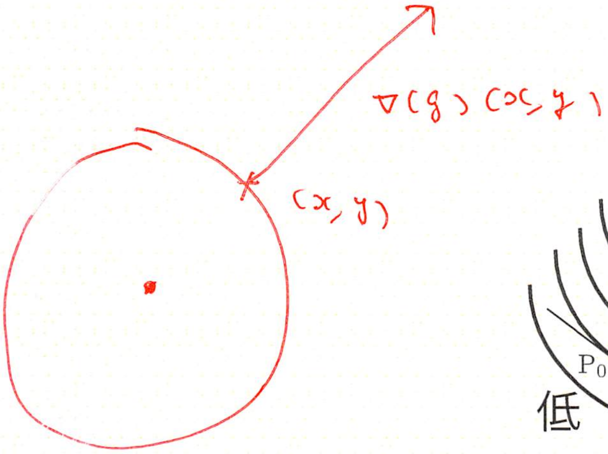
$$\nabla(g)(a, b) := \begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix}$$

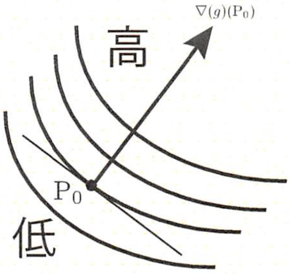
が接線に垂直であることが分かります．$\nabla(g)(a, b)$ を g の (a, b) における勾配ベクトル（**gradient vector**）と呼びます．

法線ベクトル


z = g(x, y)
(x, y, 0)
(a, b, 0)
z = 0
x−y

Gradient Vector —その向きは？





$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$g_x = 2x$

$g_y = 2y$

$\nabla(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

勾配ベクトルは g が大きくなる方向に向いています．登っていくときに最もきつい方向です．

例

単位円 $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ について考えます．g の偏導関数は

$$g_x = 2x, \quad g_y = 2y$$

ですから，したがって単位円上の点 (a,b) の接線は

$$2a(x-a) + 2b(y-b) = 0$$

となります．

陰関数の微分

曲線 C が (a,b) の近くで $y=\varphi(x)$ と表されていて，$g_y(a,b)\neq 0$ が成立するとします．このとき (a,b) における接線は

$$y=-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}(x-a)+b$$

となりますから，接線の傾きを考えて

$$\varphi'(a)=-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$$

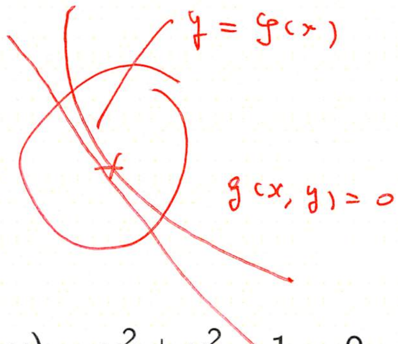
であることが分かります．例えば曲線（単位円）$g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ を $b>0$ を満たす (a,b) で考えると，曲線は直接的には

$$y=\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$$

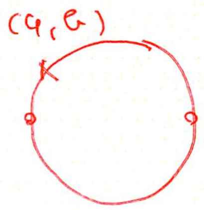
と表されますが，

$$\varphi'(a)=-\frac{2a}{2b}=-\frac{a}{b}$$

が成立することが分かります．



$g_x(a,b)(x-a)$
$+\,g_y(a,b)$
$(y-b)=0$



限界代替率（Marginal Rate of Substitution (MRS)）

消費者が商品 A,B をそれぞれ x, y 購入するときの効用が効用関数 $u(x,y)$ で与えられるとします．
このとき

$u(x,y)=\sqrt{xy}$

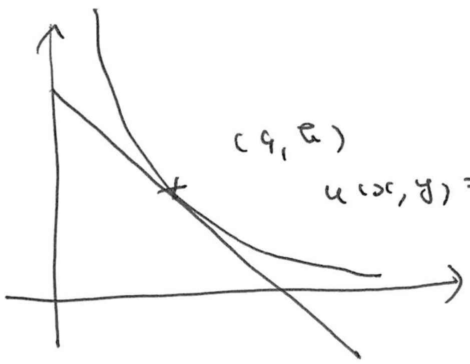
$$u(x,y)=u(a,b)$$

$u(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

を (a,b) を通る無差別曲線（**Indifference Curve**）と呼びます．このとき (a,b) における限界代替率（**Marginal Rate of Substitution**） を

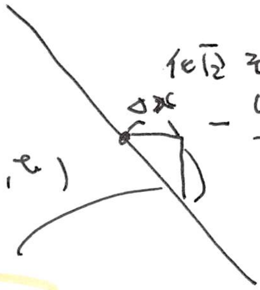
$$\mathrm{MRS}=\frac{u_x(a,b)}{u_y(a,b)}.$$

と定義します．A の購入量を a から微小量 Δx だけ効用一定の下で（無差別曲線に沿って）増加させると，$\mathrm{MRS}\times\Delta x$ だけ B を減少させることになります．



(a, b)

$u(x, y) = u(a, b)$



傾き $-\dfrac{u_x(a, b)}{u_y(a, b)}$

MRS $\boxed{\dfrac{u_x(a, b)}{u_y(a, b)}} \times \Delta x$ だけ減らす.

方向微分

Nobuyuki TOSE

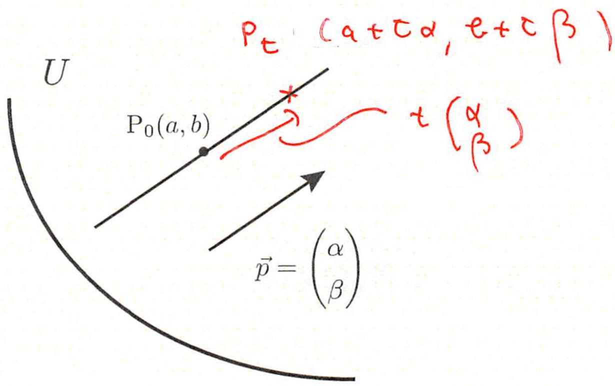
October 11, 2017

問題

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとします．$\mathrm{P}_0(a,b) \in U$ と $\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して



$$F(t) = f(\overset{P_t}{\boxed{a + t\alpha, b + t\beta}})$$

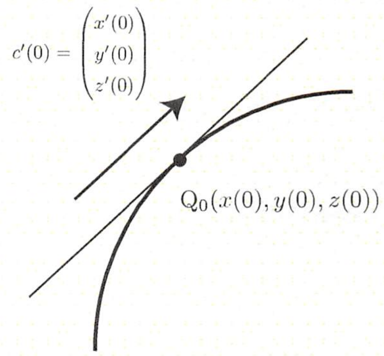
と定めるとき

$$F'(0) = ?$$

曲線の接線方向

3 次元空間中の曲線

$$c: (A,B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$



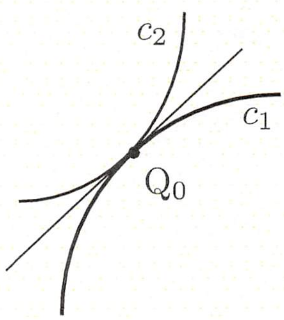
が与えられているとき c 上の点 $Q_0(x(0), y(0), z(0))$ における接ベクトルは

$$c'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}$

2 曲線が接するとは

3 次元空間中の 2 曲線



$$c_1: (A,B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$$
$$c_2: (A,B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

が与えられていて点 $Q_0(a,b,c)$ が共有されているとします．すなわち

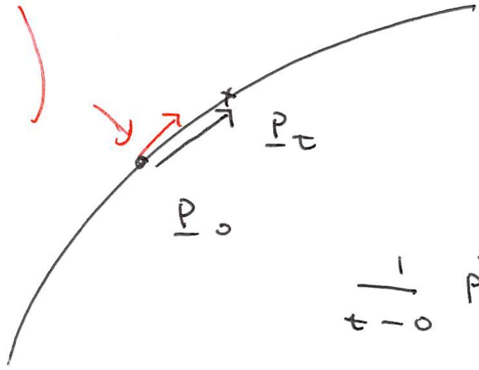
$$(a,b,c) = (x_1(t_1), y_1(t_1), z_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2), z_2(t_2))$$

がある $t_1, t_2 \in (A,B)$ に対して成立しているとします．このとき

$$c_1 \text{ と } c_2 \text{ が } Q_0 \text{ で接する} \Leftrightarrow C_1'(t_1) \parallel C_2'(t_2) \Leftrightarrow$$

$\begin{pmatrix} x_1'(t_1) \\ y_1'(t_1) \\ z_1'(t_1) \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} x_2'(t_2) \\ y_2'(t_2) \\ z_2'(t_2) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix}$$

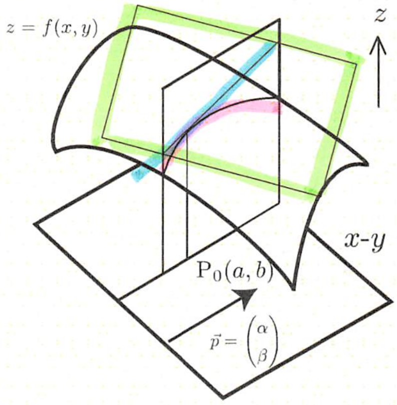


$$\overrightarrow{\underline{P}_0\underline{P}_t} = \begin{pmatrix} x(t) - x(0) \\ y(t) - y(0) \\ z(t) - z(0) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{t-0}\,\overrightarrow{P_0P_t} = \begin{pmatrix} \dfrac{x(t) - x(0)}{t-0} \\[2ex] \dfrac{y(t) - y(0)}{t-0} \\[2ex] \dfrac{z(t) - z(0)}{t-0} \end{pmatrix}$$

関数 $z = f(x, y)$ のグラフ

関数 $z = f(x, y)$ のグラフとその上の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面を考える．点 $Q_0(a, b, f(a, b))$ で接する 2 曲線



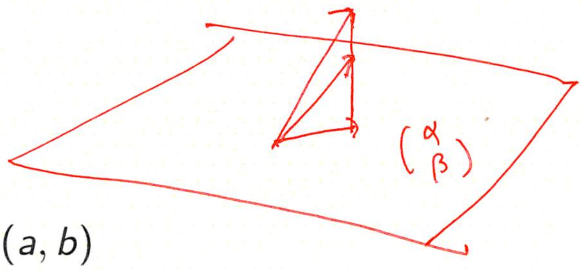
$$c_1(t) = (a + t\alpha, b + t\beta, F(t))$$

$$c_2(t) = (a + t\alpha, b + t\beta, f(a, b) + (\alpha f_x(a, b) + \beta f_y(a, b))t)$$

があります．従って $c_1'(0) \parallel c_2'(0)$ すなわち

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ F'(0) \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha f_x(a, b) + \beta f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

関数 $z = f(x, y)$ のグラフ (2)



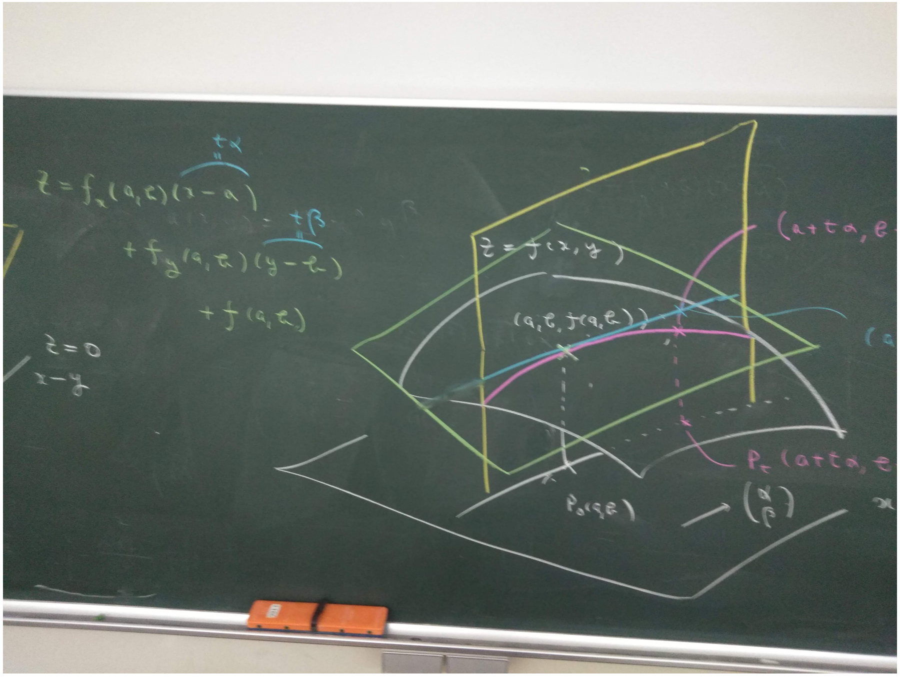
2 個の 3 次元ベクトルが平行であることから

$$F'(0) = \alpha f_x(a, b) + \beta f_y(a, b)$$

が従う．この右辺を $f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ における

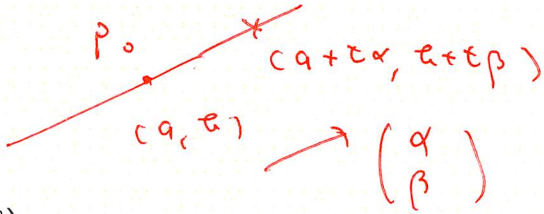
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

方向の**方向微分**と呼びます．



tα
z = f_x(a, b)(x − a)
tβ
+ f_y(a, b)(y − b)
+ f(a, b)
z = 0
x − y
z = f(x, y)
(a, b, f(a, b))
(a + tα, b
P_t (a + tα, b
P_0(a, b)
(α β)

まとめ



$$F(t) := f(a + t\alpha, b + t\beta)$$

に対して $\mathrm{P}_t(a + t\alpha, b + t\beta)$, $\vec{p} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ と定めると

$$F'(t) = \alpha f_x(\mathrm{P}_t) + \beta f_y(\mathrm{P}_t) = \left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}f_x(\mathrm{P}_t)\\ f_y(\mathrm{P}_t)\end{pmatrix}\right) = (\vec{p}, \nabla(f)(\mathrm{P}_t))$$

$F(t) = f(x(t), y(t))$

$= \nabla(f)(P_t)$

$F'(t) = f_x(x(t), y(t))\, x'(t) + f_y(P_t)\, y'(t)$

発展（重要な応用）

$$F'(t) = \alpha f_x(a + t\alpha, b + t\beta) + \beta f_x(a + t\alpha, b + t\beta)$$

の両辺を t で微分する．ここで 2 階の偏微分

$$f_{xx} = (f_x)_x\,,\ f_{xy} = (f_x)_y\,,\ f_{yx} = (f_y)_x\,,\ f_{yy} = (f_y)_y$$

を定義する．実は **Young** の定理によって

$$f_{xy} = f_{yx}$$

が成立することに注意しよう．これを用いると

$$\begin{aligned}F''(t) &= \alpha^2 f_{xx}(P_t) + 2\alpha\beta f_{xy}(P_t) + \beta^2 f_{yy}(P_t)\\ &= \left(\begin{pmatrix}f_{xx}(P_t) & f_{xy}(P_t)\\ f_{yx}(P_t) & f_{yy}(P_t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Ⅰ　$x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$ の $(1, 1)$ における接線を求めよ.

Ⅱ　$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ の $(1, 0)$ における接線を求めよ.

Ⅲ　
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$$

を満たす (x, y, z) に対して x, y を z で表す（クラメールを使う）