2019 年 10 月 2 日微分積分演習問題

I 次の曲面の P_0 における接平面を求めましょう。
(1) $z = xy - 2x + 2y - 1$ at $\mathrm{P}_0(0, 0, -1)$
(2) $z = \frac{x}{x+y}$ at $\mathrm{P}_0(1, -2, -1)$
(3) $z = x^2 - xy + 2y^2$ at $\mathrm{P}_0(2, 1, 4)$
(4) $z = \frac{y}{1+x^2}$ at $\mathrm{P}_0(0, 0, 0)$

解答 (1)

$$z_x = y - 2, \quad z_y = x + 2$$

から

$$z_x(0, 0) = -2, \quad z_y(0, 0) = 2$$

となります．よって $\mathrm{P}_0(0, 0, -1)$ における接平面は

$$z = -2x + 2y - 1$$

であることが分かります．

(2)

$$z_x = \frac{1 \cdot (x + y) - x \cdot 1}{(x + y)^2} = \frac{y}{(x + y)^2}, \quad z_y = \frac{-x}{(x + y)^2}$$

から

$$z_x(1, -2) = -2, \quad z_y(1, -2) = -1$$

となります．よって $\mathrm{P}_0(1, -2, -1)$ における接平面は

$$z = -2(x - 1) - (y + 2) - 1$$

であることが分かります．

(3)

$$z_x = 2x - y, \quad z_y = -x + 4y$$

から

$$z_x(2, 1) = 3, \quad z_y(2, 1) = 2$$

となります．よって $\mathrm{P}_0(2, 1, 4)$ における接平面は

$$z = 3(x - 2) + 2(y - 1) + 4$$

であることが分かります．

(4)

$$z_x = -\frac{y(2x)}{(1 + x^2)^2} = -\frac{2xy}{(1 + x^2)^2}, \quad z_y = \frac{1}{1 + x^2}$$

から

$$z_x(0, 0) = 0, \quad z_y(0, 0) = 1$$

となります．よって $\mathrm{P}_0(0,0,0)$ における接平面は

$$z = y$$

であることが分かります．

II 以下の曲線 $g(x,y)=0$ の P_0 における接線を求めましょう．

(1) $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ at $P_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$

(2) $g(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$ at $P_0(1,1)$

(3) $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ at $P_0(0,1)$

解答 (1) $g_x = 2x$, $g_y = 8y$ から

$$g_x(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = \sqrt{2}, \quad g_y(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$$

と計算されます．従って $\mathrm{P}_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ における接線は

$$\sqrt{2}(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) + 2\sqrt{2}(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) = 0$$

となります．

(2) $g_x = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $g_y = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$ から

$$g_x(1,1) = \frac{1}{3}, \quad g_y(1,1) = \frac{1}{3}$$

となりますから，$\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) = 0$$

となります．

(3) $g_x = 2x - y$, $g_y = -x + 2y$ から

$$g_x(0,1) = -1, \quad g_y(0,1) = 2$$

となりますから，$\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$-1 \cdot (x-0) + 2(y-1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad -x + 2(y-1) = 0$$

となります．

III 資本 K, 労働力 L の投入に対する生産関数

$$Q = F(K,L) = 9K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

を考えます．

(1) $K = 216$ and $L = 10^3$ に対する生産量 Q を求めましょう．

(2) $(K,L) = (216, 10^3)$ のときの資本の限界生産物 MPK と労働の限界生産物 MPL を求めて，$F(216, 998)$ と $F(217.5, 10^3)$ の近似値を求めましょう．

解答 計算のために $216 = 6^3$ に注意しましょう．このとき

$$Q = F(216, 10^3) = 9 \times \left(6^3\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(10^3\right)^{\frac{2}{3}} = 9 \times 6 \times 10^2 = 5400$$

であることが分かります．次に MPK と MPL を以下のように求めます．

$$F_K(K, L) = 3K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}, \quad F_L(K, L) = 6K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

従って $K = 216 = 6^3$, $L = 10^3$ のとき

$$\begin{aligned} MPK = F_K(216, 10^3) &= 3\left(6^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(10^3\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 3 \times \frac{1}{36} \times 10^2 = \frac{1}{12} \times 10^2 = 8.33\ldots \\ MPL = F_L(216, 10^3) &= 6 \times \left(6^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(10^3\right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 6 \times 6 \times 10^{-1} = 3.6 \end{aligned}$$

以上から $F_L(216, 10^3)$ を用いて $F(216, 998) = F(216, 10^3 - 2)$ の近似値を

$$\begin{aligned} F(216, 10^3 + 2) &\approx F(216, 10^3) + F_L(216, 10^3) \cdot (-2) \\ &= 5400 + 3.6 \times (-2) = 5392.8 \end{aligned}$$

と求めます．さらに $F_K(216, 10^3)$ を用いて $F(217.5, 10^3) = F(216 + 1.5, 10^3)$ の近似値を

$$\begin{aligned} F(216 + 1.5, 10^3) &\approx F(216, 10^3) + F_K(216, 10^3) \cdot 1.5 \\ &= 5400 + \frac{1}{12} \times 10^2 \times 1.5 = 5412.5 \end{aligned}$$

と求めます．