I 以下の $f(x,y)$ に対して $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求める

(1) $f(x,y) = \log(x^2+y^2+1)$ $(\log t)' = \frac{1}{t}$

(2) $f(x,y) = x e^{x-y}$ $(e^t)' = e^t$

(3) $f(x,y) = (x-2y)^3$

(4) $f(x,y) = (2x+y)(x+3y)$

II $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y$

の極値点を求めよ.(のうち x-1L の1点だけを除う)

III $\begin{pmatrix} a & \cancel{b} \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

I (1) $u = x^2 + y^2 + 1$ とおくと $z = \log u$.

$$z_x = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$z_y = \frac{1}{u} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

$u = x - y$

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^u) = e^u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = e^u \cdot 1 = e^{x-y}.$$

(2) $f_x = 1 \cdot e^{x-y} + x \cdot e^{x-y}$

$= (x+1)\, e^{x-y}$

$f_y = x\,(-1)\, e^{x-y}$

$= -x\, e^{x-y}$

$$\frac{\partial}{\partial y} e^u = e^u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = e^u \cdot (-1)$$

(3) $u = x - 2y$ とおくと $z = u^3$

$z_x = 3u^2 \cdot 1 = 3(x-2y)^2$

$z_y = 3u^2 \cdot (-2) = -6(x-2y)^2$

(4) $f_x = 2(x + 3y) + (2x + y) \cdot 1 = 4x + 7y$

$f_y = 1(x + 3y) + (2x + y) \cdot 3 = 7x + 6y$.

II $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y$

$$\begin{cases} z_x = 2x - y - 2 = 0 \\ z_y = -x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$ だからクラメールが使える.

$$x = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(4-3) = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-6+2) = -\frac{4}{3}$$

実は $\mathbb{R}^2$ 上 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ で最小値であることが分かる.

III

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (ad-bc)\, I_2$$

identity matrix

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= (ad-bc)\, I_2$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して 余因子行列 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

とすると

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|\, I_2$$

$|A| = ad-bc \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{|A|}(A\tilde{A}) = \frac{1}{|A|}(\tilde{A}A) = I_2$$

$$\rightarrow A \cdot \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} \cdot A = I_2$$

$$\lambda(AB)$$
$$= (\lambda A)B$$
$$= A(\lambda B)$$

$A, B \in M_2(\mathbb{R})$

$A \in M_2(\mathbb{R})$ について $\exists X \in M_2(\mathbb{R})$

$$AX = XA = I_2$$

$\rightsquigarrow$ A は正則. $X = A^{-1}$ とする.

$|A| \neq 0 \Rightarrow A$ は正則で $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \tilde{A}$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $|A| = ad - bc \neq 0$ ならば

A は正則で $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\beta \\ \sin\beta\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-\sin\beta \\ \cos\beta\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

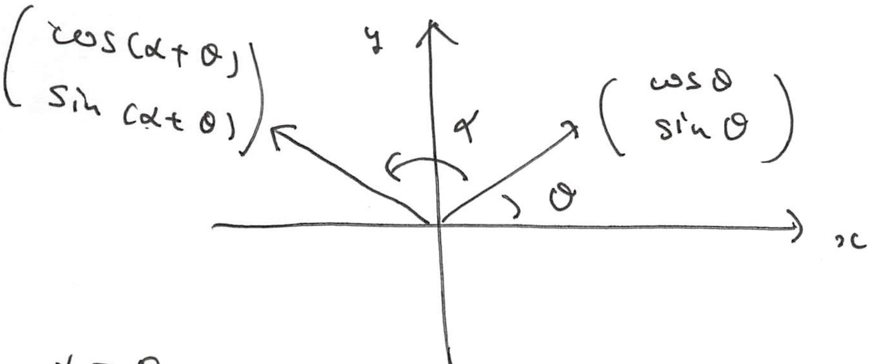
Rotation

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ とすると $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$

$$R_\alpha \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$



$\alpha = 0$ $\quad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$$R_\alpha R_{-\alpha} = R_{-\alpha} R_\alpha = R_0 = I_2$$

$$(R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-\sin\alpha \\ \cos\alpha\end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$${}^tR_\alpha = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\alpha \quad \sin\alpha} \\ \boxed{-\sin\alpha \quad \cos\alpha} \end{pmatrix}$$

$\overset{\shortparallel}{{}^tR_\alpha}$

$\boxed{R_\alpha^{-1} = {}^tR_\alpha.}$

接平面（Tangent Plane）

Nobuyuki TOSE

October 04, 2017

平面の方程式

点 P_0 を通り $\vec{n}(\neq \vec{0})$ に垂直な平面 α を考えます．α の任意の点 P に対して

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = 0$$

inner product
dot product

が成立します．P_0 の座標が (x_0, y_0, z_0)，P の座標が (x, y, z),

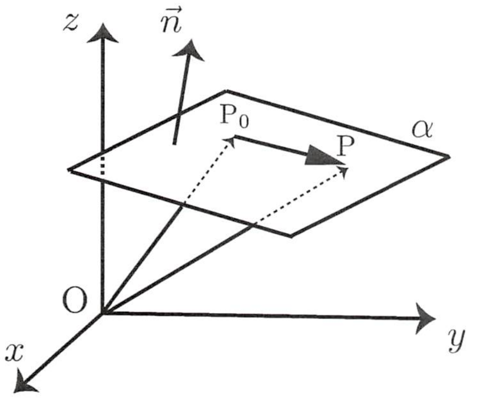
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{であるとき} \quad \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

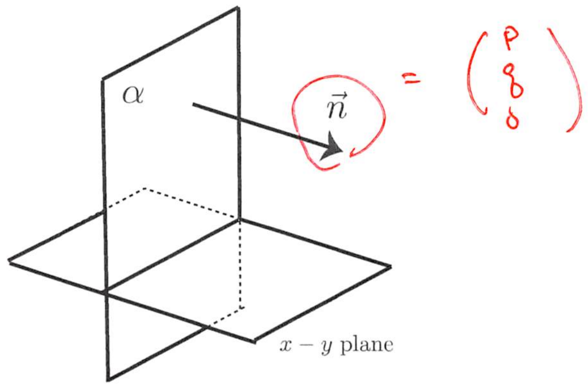
であるので，上の条件は座標を用いると

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

The Equation of a plane

$\vec{n}$ のことを平面の法線ベクトル (normal vector) と呼びます.

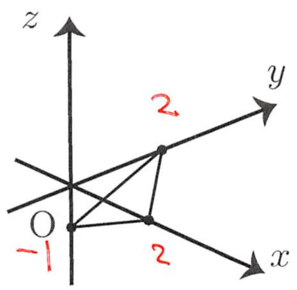




具体例

$$x + y - 2z = 2$$

について考えます．通る点を具体的に求めます．

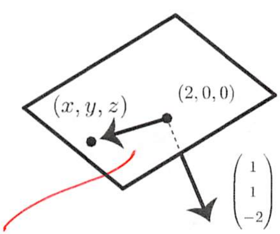


segment

x 切片	(2,0,0)
y 切片	(0,2,0)
z 切片	(0,0,-1)

$(2, 0, 0)$ を通ることから

$$\begin{array}{rccccccc} & x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ -) & 2 & + & 0 & - & 2\cdot 0 & = & 2 \\ \hline & (x-2) & + & y & - & 2z & = 0 & \end{array}$$



すなわち

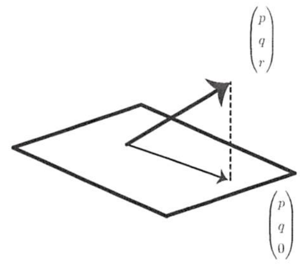
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

In case $r = 0$

$r = 0$ の場合 $\vec{n}$ は $x - y$ 平面に平行になり，平面 α は $x - y$ 平面に垂直になります．

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \parallel x - y\text{平面}, \quad \alpha \perp x - y\text{平面}$$



偏微分（復習）

2 変数関数

$$z = f(x, y)$$

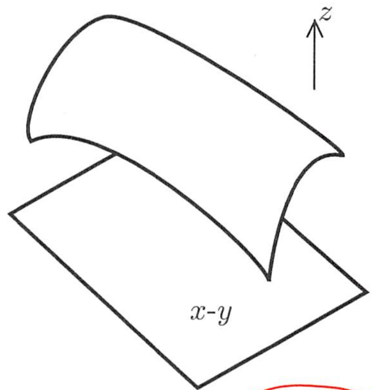
に対して x の関数

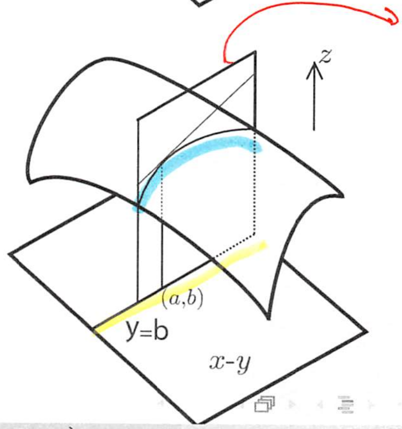
$$F(x) := f(x, b)$$

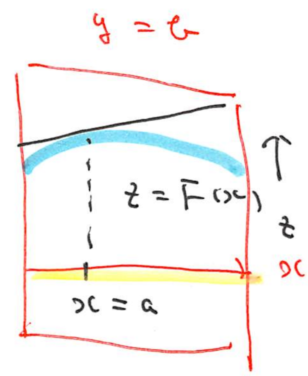
を考えて，(a, b) における x に関する
偏微分係数

$$f_x(a, b) = F'(a)$$

を定義します．







Tangent Plane

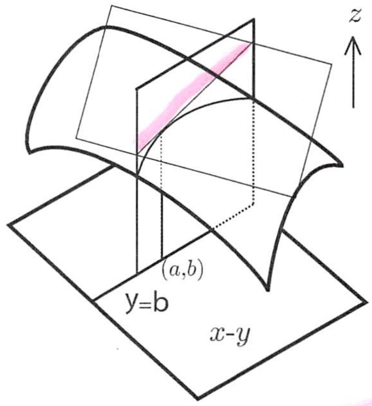
関数 $f(x,y)$ のグラフ

$$z = f(x,y)$$

の $(a, b, f(a,b))$ における接平面を求めます．そのために

$$z = A(x-a) + B(y-b) + f(a,b) \quad (1)$$

の係数 A,B を求めます．

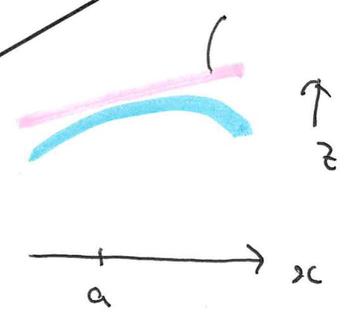


$f_x(a,b)$
$=$
$F'(a)$

$z = A(x-a)$
$+ f(a,b)$

$y = b$

$A = f_x(a,b)$



Tangent Plane (2)

接平面と切断面 $y=b$ との交わりは，切断面の上では $z=F(x)$ の $x=a$ における接線となります．さらに (1) に $y=b$ を代入して切断面 $y=b$ 上に制限すると

$$z = A(x-a) + f(a,b)$$

となります．これからこの直線の傾きが A であることが分かり，

$$A = F'(a) = f_x(a,b)$$

であることが分かります．同様に

$$B = f_y(a,b)$$

となりますから，結局，接平面は方程式

$$z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

で表されます．

例

関数 $Ax^{\alpha}y^{\beta}$ コブ・ダグラス型関数

$(t^{\alpha})' = \alpha t^{\alpha-1}$

$$z = f(x, y) = 4x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

を $(x, y) = (a, b) = (10^4, 625)$ の周りで考えます．関数 f の偏導関数は

$$f_x(x, y) = 3x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}, \quad f_y(x, y) = x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}$$

となりますから，偏微分係数は

$3 \cdot 10^{-1} \cdot 5$ $10^3 \cdot \frac{1}{5^3}$

$(t^{\frac{3}{4}})' = \frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}$

$(t^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}$

$625 = 5^4$

$$f_x(10^4, 625) = 1.5, \quad f_y(10^4, 625) = 8$$

と計算されます．従って $(x, y) = (10^4, 625)$ における接平面は

$$z = 1.5(x - 10^4) + 8(y - 625) + 2.0 \times 10^4$$

であることが分かります．

$f(10^4, 625) = 4 \cdot 10^3 \cdot 5 = 2.0 \times 10^4$

限界生産物（Marginal Products）

資本 (Capital) の投入量が K, 労働 (labor) の投入量が L の生産関数

$$Q = f(K, L)$$

を考えます．このとき $(K, L) = (K_0, L_0)$ の周りで Q は接平面を用いて

$$\begin{aligned} Q &\approx f_K(K_0, L_0)(K - K_0) + f_L(K_0, L_0)(L - L_0) + f(K_0, L_0) \\ &= f_K(K_0, L_0)\Delta K + f_L(K_0, L_0)\Delta L + f(K_0, L_0) \end{aligned}$$

従って

$Q_0 = f(K_0, L_0)$

$$\begin{aligned} \Delta Q &= Q - Q_0 = f(K, L) - f(K_0, L_0) \\ &\approx f_K(K_0, L_0)\Delta K + \boxed{f_L(K_0, L_0)}\Delta L \end{aligned}$$

$= MPL.$

と近似します（これを **1** 次近似と呼びます）．

限界生産物（Marginal Products）

$\Delta L = 0$ すなわち $L = L_0$ のとき

$$\Delta Q = f(K_0 + \Delta K, L_0) - f(K_0, L_0) \approx f_K(K_0, L_0) \cdot \Delta K$$

が成立します．このとき

$$MPK = F_K(K_0, L_0)$$

を $(K, L) = (K_0, L_0)$ における資本の限界生産物（**Marginal Product of Capital**）(MPK) と呼びます．

$MPL = F_L(K_0, L_0)$ 労働限界生産物．

限界生産物（Marginal Products）

具体的に Cobb-Douglass 型の生産関数

$$Q = F(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}} L^{\frac{1}{4}}$$

を $(K, L) = (K_0, L_0) = (10^4, 625)$ の周りで考えます．

$$F_K(K, L) = 4 \cdot \frac{3}{4} K^{-\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}} = 3K^{-\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}$$

$$F_L(K, L) = 4 \cdot \frac{1}{4} K^{-\frac{3}{4}} L^{\frac{3}{4}} = K^{-\frac{3}{4}} L^{\frac{3}{4}}$$

$+$ $-\frac{3}{4}$ $+$ $-$

と偏導関数を計算します．

$$(t^{\alpha})' = \alpha t^{\alpha - 1}$$

限界生産物（Marginal Products）

このとき (K_0, L_0) における資本の限界生産物 (MPK) と労働の限界生産物（**Marginal Product of Labor**） (MPL) は

$= (10^4, 625)$

$$F_K = 3K^{-\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}$$

$$F_L = K^{\frac{3}{4}} L^{-\frac{3}{4}}$$

$5^4 = 625$

$$MPK = F_K(K_0, L_0) = \frac{3 \cdot 5}{10} = 1.5$$

$$MPL = F_L(K_0, L_0) = \frac{10^3}{5^3} = 8$$

となります．さらに $Q = F(10^4 + 100, 625) = 20,149.813\dots$ の値の近似を

$$F(10^4 + 100, 625) \approx F(10^4, 625) + F_K(10^4, 625) \cdot 100$$
$$= 20,000 + 1.5 \times 100 = 20,150$$

と計算します．

曲線の接線

曲線 C が 2 変数関数 g を用いて

$$g(x, y) = 0$$

と与えられているとします．例えば単位円は

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

と表されます．C 上の点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ が与えられているときに，C の $\mathrm{P}_0(a, b)$ における接線を求めます．