

1 偏微分法

2019年9月25日演習問題解答

I 偏導関数 f_x と f_y を計算しましょう.

(1) $f(x, y) = (2x + 3y)(3x + 5y)$ (2) $f(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$ (3) $f(x, y) = (2x + 5y)^3$

(4) $f(x, y) = \left(\frac{2x+3y}{x+2y}\right)^2$ (5) $f(x, y) = ye^{x+y}$

解答 (1)

$$f_x = 2 \cdot (3x + 5y) + (2x + 3y) \cdot 3 = 12x + 19y$$

$$f_y = 3 \cdot (3x + 5y) + (2x + 3y) \cdot 5 = 19x + 30y$$

(2)

$$f_x = \frac{1}{1+y^2}$$

$$f_y = x \left(-\frac{2y}{(1+y^2)^2} \right) = -\frac{2xy}{(1+y^2)^2}$$

(3)

$$f_x = 2 \left(\frac{2x+3y}{x+2y} \right) \frac{2 \cdot (x+2y) - (2x+3y) \cdot 1}{(x+2y)^2}$$
$$= \frac{2y(2x+3y)}{(x+2y)^3}$$

$$f_y = 2 \left(\frac{2x+3y}{x+2y} \right) \frac{3 \cdot (x+2y) - (2x+3y) \cdot 2}{(x+2y)^2}$$
$$= -\frac{2x(2x+3y)}{(x+2y)^3}$$

(4)

$$f_x = 3(2x+5y) \cdot 2 = 6(2x+5y)^2$$

$$f_y = 3(2x+5y) \cdot 5 = 15(2x+5y)^2$$

(5)

$$f_x = y \cdot e^{x+y} \cdot 1 = ye^{x+y}$$

$$f_y = 1 \cdot e^{x+y} + y \cdot e^{x+y} \cdot 1 = (y+1)e^{x+y}$$

II 以下の関数の停留点を求めましょう.

(1) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$

(2) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

(3) $z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$

(4) $z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$

(5) $z = x^3 - xy - y^2$

(6) $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$

(7) $z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$

(8) $z = x^3 + y^3 + 6xy$

(1)

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 4 = 0 \\ z_y = x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式を使って解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{3} = 4$$

となりますから、 $(x, y) = (0, 4)$ が z の停留点であることが分かります。

(2)

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 9y = 0 \cdots (I) \\ z_y = 3y^2 - 9x = 0 \cdots (II) \end{cases}$$

を解きます。(I) から $y = \frac{1}{3}x^2$ となるので (II) から得られる $y^2 = 3x$ に代入して

$$\frac{1}{9}x^4 = 3x \quad \text{すなわち} \quad x^4 = 27x$$

を得ます。従って

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = 3$$

が必要です。

(a) $x = 0$ のとき、(I) から $y = 0$ となりますが、逆に $(x, y) = (0, 0)$ は (I) かつ (II) を満たします。

(b) $x = 3$ のとき、(I) から $y = 3$ となりますが、逆に $(x, y) = (3, 3)$ は (I) かつ (II) を満たします。

以上で z の停留点は $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$ であることが分かりました。

(3)

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 4 = 0 \\ z_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから、 $(x, y) = (2, 0)$ が z の停留点であることが分かります。

(4)

$$\begin{cases} z_x = 2x + 4y - 6 = 0 \\ z_y = 4x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1$$

から停留点は $(x, y) = (1, 1)$ となります。

(5)

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - y = 0 & (i) \\ z_y = -x - 2y = 0 & (ii) \end{cases}$$

を解きます。(ii) から $x = -2y$ となりますが、これを (i) に代入して

$$12y^2 - y = 0$$

を得ますが、これから $y = 0$ または $y = \frac{1}{12}$ であることが分かります。これを $x = -2y$ に代入して

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad \text{のとき} \quad x = 0 \\ y = \frac{1}{12} & \quad \text{のとき} \quad x = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

となりますから、停留点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$$

であることが分かります。

(6) まず関数

$$z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$$

の停留点を求めましょう。まず z の偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned} z_x &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x^2 + y^2) + e^{-x^2-y^2}(4x) \\ &= 2xe^{-x^2-y^2}(-2x^2 - y^2 + 2) \\ z_y &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x^2 + y^2) + e^{-x^2-y^2}(2y) \\ &= 2ye^{-x^2-y^2}(-2x^2 - y^2 + 1) \end{aligned}$$

となります。 $e^{-x^2-y^2} > 0$ ですから

$$\begin{aligned} z_x = z_y = 0 \\ \Leftrightarrow x(2x^2 + y^2 - 2) = 0 \\ \quad \text{and } y(2x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (x = 0 \text{ or } 2x^2 + y^2 = 2) \\ \quad \text{and } (y = 0 \text{ or } 2x^2 + y^2 = 1) \\ \Leftrightarrow (x = y = 0) \\ \quad \text{or } (x = 0 \text{ and } 2x^2 + y^2 = 1) \\ \quad \text{or } (y = 0 \text{ and } 2x^2 + y^2 = 2) \\ \quad \text{or } (2x^2 + y^2 = 2 \text{ and } 2x^2 + y^2 = 1) \\ \Leftrightarrow (x = y = 0) \text{ or } (x = 0 \text{ and } y^2 = 1) \\ \quad \text{or } (y = 0 \text{ and } x^2 = 1) \\ \quad \text{or } (2x^2 + y^2 = 2 \text{ and } 2x^2 + y^2 = 1) \\ \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0) \end{aligned}$$

が成立します。従って z の停留点は $(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$ です。

(7) $f(x, y)$ の偏導関数は

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x^2 + y^2) \cdot 2x - 4x = 4x(x^2 + y^2 - 1) \\ f_y &= 2(x^2 + y^2) \cdot 2y - 4x = 4y(x^2 + y^2 + 1) \end{aligned}$$

と計算されます。このことから

$$\begin{aligned} f_x = 0 &\Leftrightarrow (x = 0) \text{ OR } (x^2 + y^2 = 1) \\ f_y = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

が従いますので

$$\begin{aligned} f_x = f_y = 0 &\Leftrightarrow (x = y = 0) \\ &\quad \text{OR } (x^2 + y^2 = 1, \text{ AND } y = 0) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0) \end{aligned}$$

が分かります。以上で f の停留点は $(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$ の3点であることが示されました。

(8) (コアテキストの 282 ページの例 8.18)

z の偏導関数は

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6y = 0 \cdots (1) \\ z_y = 3y^2 + 6x = 0 \cdots (2) \end{cases}$$

と計算されます。(2) から $x = -\frac{1}{2}y^2$ を得ますが、これを (1) から得られる $y = -\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}y^2 \right)^2 = -\frac{1}{8}y^4$$

が導かれます。従って

$$y(y^3 + 8) = 0$$

から $y = 0$ または $y = -2$ であることが必要条件であることが分かります。このとき

- (i) $y = 0$ のとき (2) に代入して $x = 0$
- (ii) $y = -2$ のとき (2) から $x = -2$ を得る。

を得ます。以上で停留点は

$$(x, y) = (0, 0) \text{ または } (-2, -2)$$

であることが示されました。