2019年7月17日
calcNT Lec14

I (3階)

(1) $f(\theta)=\cos\theta$ のとき $f'(\theta)=-\sin\theta$, $f''(\theta)=-\cos\theta$,
$f^{(3)}(\theta)=\sin\theta$ となる. $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$
に注意すると $\theta\neq 0$ のとき

$$\cos\theta = 1-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{3!}\cdot\sin c\cdot\theta^3$$

を満たす c が 0 と θ の間に存在することが分かる.

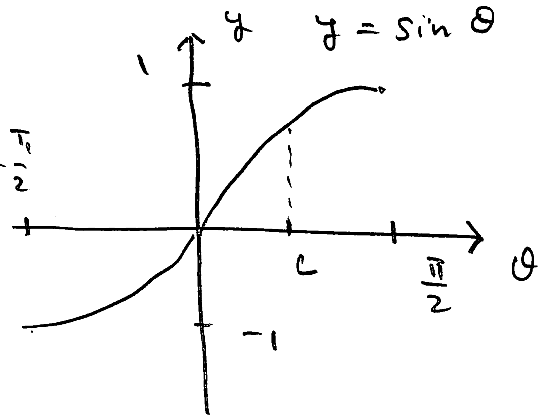
(2) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき $0<c<\theta<\frac{\pi}{2}$ から

$$\sin c>0$$

が分かる. $\theta^3>0$ なので

$$\frac{1}{3!}\sin c\cdot\theta^3>0$$

と剰余項が評価される.



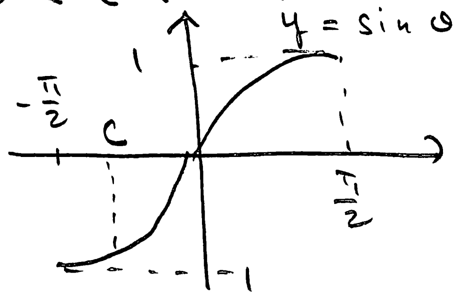
これから

$$\cos\theta-\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)=\frac{1}{3!}\sin c\cdot\theta^3>0$$

となるので

$$\cos\theta \boxed{>} 1-\frac{1}{2}\theta^2$$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<0$ のとき　　$-\frac{\pi}{2}<\theta<c<0$ なので



$$\sin c<0$$

となる $\theta<0$ から $\theta^3<0$ なので

$$\frac{1}{3!}\cdot \sin c \cdot \theta^3 > 0$$

と剰余項が評価される. これから

$$\cos\theta - \left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right) = \frac{1}{3!}\sin c\cdot\theta^3 > 0$$

となるので

$$\cos\theta \boxed{>} 1-\frac{1}{2}\theta^2$$

I (4階) $f(\theta)=\sin\theta$ のとき

$f'(\theta)=\cos\theta$, $f''(\theta)=-\sin\theta$, $f^{(3)}(\theta)=-\cos\theta$,

$f^{(4)}(\theta)=\sin\theta$ となる. $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$,

$f^{(3)}(0)=-1$ に注意すると 4階のTaylorの定理から

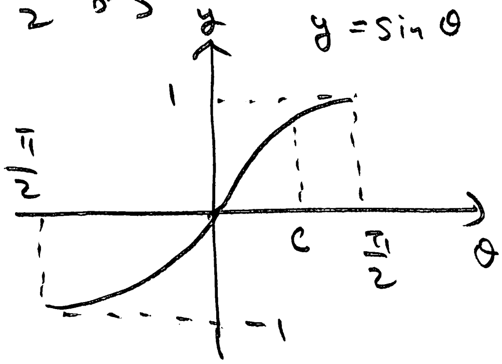
$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\sin c\cdot\theta^4$$

を満たす c が 0 と c の間に存在する.

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき　$0<c<\theta<\frac{\pi}{2}$ から

$$\sin c > 0$$

が分かる, $\theta\neq 0$ から $\theta^4>0$ が分かるので



$$\frac{1}{4!}\sin c\cdot\theta^4 > 0$$

と剰余項は評価される. 従って

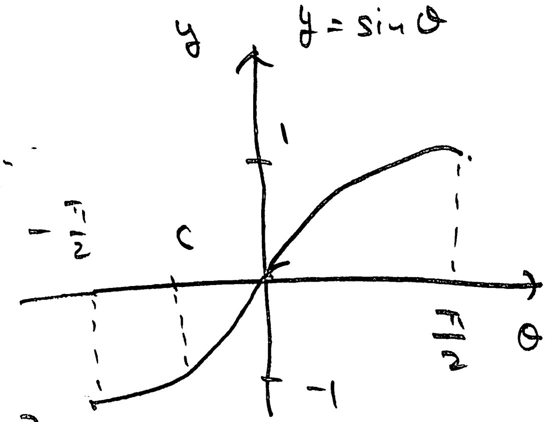
$$\sin\theta - \left(\theta-\frac{1}{3!}\theta^3\right) = \frac{1}{4!}\sin c\cdot\theta^4 > 0$$

から

$$\sin\theta \boxed{>} \theta - \frac{1}{3!}\theta^3$$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ のとき.

$-\frac{\pi}{2} < \theta < c < 0$ から



$$\sin c < 0$$

が分かる. $\theta \neq 0$ から $\theta^4 > 0$ なので

$$\frac{1}{4!}\sin c \cdot \theta^4 < 0$$

と剰余項は評価できる. よって

$$\sin\theta - \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3\right) = \frac{1}{4!}\sin c \cdot \theta^4 < 0$$

から

$$\sin\theta < \theta - \frac{1}{3!}\theta^3$$

であることが分かる.

II (3限) $\frac{x^2}{4} + \varphi(x)^2 - 9 \equiv 0$ を微分すると

$$\frac{x}{2} + 2\varphi(x)\varphi'(x) \equiv 0 \qquad \cdots (1)$$

が分かる. 従って $\varphi(x) > 0$ $(-6 < x < 6)$ から

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{4\varphi(x)}$$

が従う. (1) を微分すると

$$\frac{1}{2} + 2\varphi'(x)^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) \equiv 0$$

となるので

$$\varphi''(x) = -\frac{\frac{1}{2} + 2\varphi'(x)^2}{2\varphi(x)} = -\frac{\frac{1}{2} + 2\frac{x^2}{16\varphi(x)^2}}{2\varphi(x)}$$

$$= -\frac{8\varphi(x)^2 + 2x^2}{32\varphi(x)^3} = -\frac{\frac{1}{4}x^2 + \varphi(x)^2}{8\cdot 32\varphi(x)^3} = -\frac{9}{256\varphi(x)^3}$$

Ⅱ（4点）　$\dfrac{x^2}{9}+\varphi(x)^2-4\equiv 0$　の両辺を微分して

$$\frac{2x}{9}+2\varphi(x)\varphi'(x)\equiv 0 \qquad (1)$$

となる　$\varphi(x)>0\ (-6<x<6)$ なので　これから

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{9}\cdot\frac{x}{\varphi(x)}$$

がいえる　(1) を x で微分すると

$$\frac{2}{9}+2\left(\varphi'(x)\right)^2+2\varphi(x)\varphi''(x)\equiv 0$$

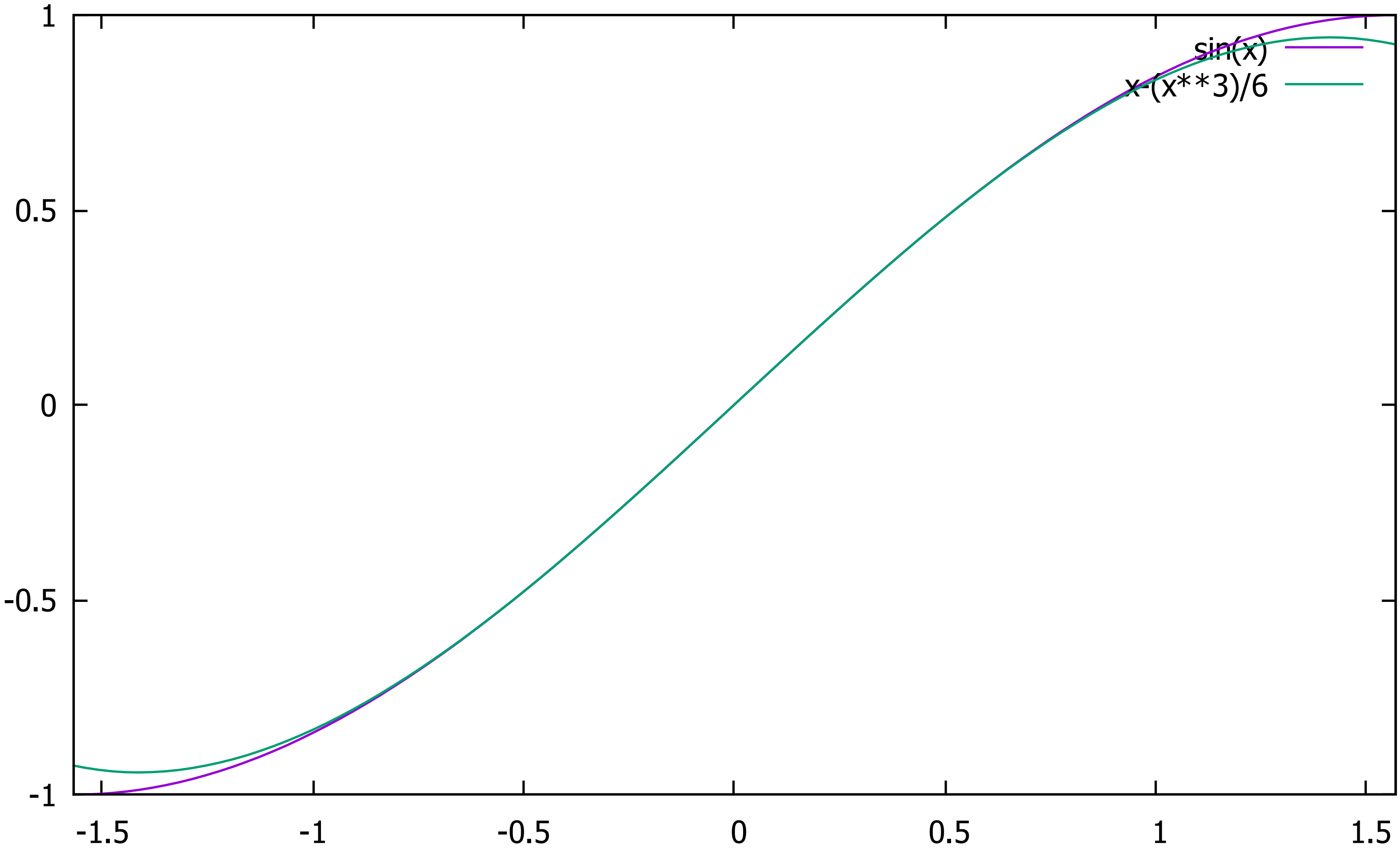
となるので

$$\varphi''(x)=-\frac{\frac{1}{9}+\left(\varphi'(x)\right)^2}{\varphi(x)}$$

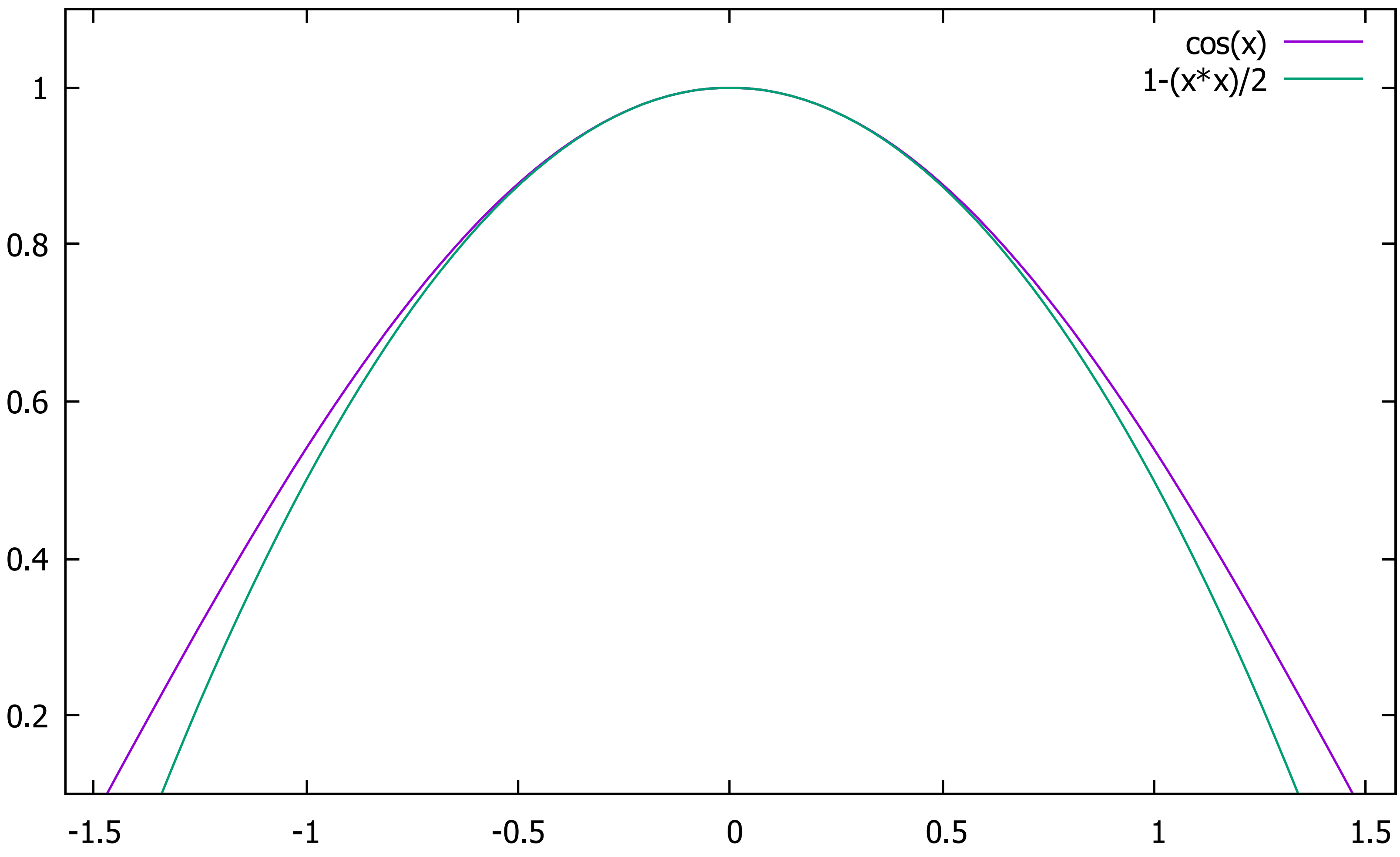
$$=-\frac{\frac{1}{9}+\frac{1}{81}\cdot\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right)^2}{\varphi(x)}$$

$$=-\frac{x^2+9\varphi(x)^2}{81\varphi(x)^3}=-\frac{\frac{1}{9}x^2+\varphi(x)^2}{9\cdot 81\varphi(x)^3}$$

$$=-\frac{4}{729\varphi(x)^3}$$



sin(x)
x-(x**3)/6
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5


cos(x)
1-(x*x)/2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5