2019/07/10
calc N 2019 L13

I $(\tan\theta)' = \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)'$

$$= \frac{(\sin\theta)'\cos\theta - \sin\theta\cdot(\cos\theta)'}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta\,(-\cos\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta}$$

II (1) $f(t) = \log(1+t)$ のとき

$$f'(t) = \frac{1}{1+t},\ f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2},\ f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$$

$$f^{(4)}(t) = -\frac{3!}{(1+t)^4}$$

で

$f(0) = \log 1 = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$,

$f^{(3)}(0) = 2$

となります. これから

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}\cdot 2\,t^3 - \frac{1}{4!}\cdot\frac{3!}{(1+c)^4}t^4$$

$$= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+c)^4}t^4$$

ここで満たす c が 0 と t の間に存在する.

(2) $t > 0$ のとき $0 < c < t$

$-1 < t < 0$ のとき $-1 < t < c < 0$

から $1 + c > 0$ が従う. よって

$t \neq 0$ から $t^4 > 0$ なので

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+c)^4}t^4 < 0$$

が分かる. 従って

$$\log(1+t) < t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

であることが分かる.

III　$f(t) = \dfrac{1}{1-t}$ のとき

$$f'(t) = -\frac{1}{(1-t)^2}\cdot(-1) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$f''(t) = -\frac{2}{(1-t)^3}\cdot(-1) = \frac{2}{(1-t)^3}$$

$$f^{(3)}(t) = -\frac{2\cdot 3}{(1-t)^4}(-1) = \frac{3!}{(1-t)^4}$$

となる. $f(0)=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$ も従う. これから

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \frac{1}{2}\cdot 2t^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{3!}{(1-c)^4}t^3$$

$$= 1 + t + t^2 + \frac{1}{(1-c)^4}t^3$$

を満たす c が 0 と t の間に存在する.