

2019年7月10日演習問題解答

I $f(t) = \sin t$ に対して3階の Taylor の定理を $a = 0, b = t$ の形で適用しましょう。

(解答)

$$f(t) = \sin t, f'(t) = \cos t, f''(t) = -\sin t$$

から

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0$$

であるのが分かります。従って $t \neq 0$ のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c)t^3$$

すなわち

$$\sin t = t - \frac{\cos c}{3!}t^3$$

を満たす c が 0 と t の間に存在します。

II $g(t) = \cos t$ に対して3階の Taylor の定理を $a = 0, b = t$ の形で適用しましょう。

(解答)

$$g(t) = \cos t, g'(t) = -\sin t, g''(t) = -\cos t$$

から

$$g(0) = 1, g'(0) = 0, g''(0) = -1$$

であるのが分かります。従って $t \neq 0$ のとき

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + \frac{1}{3!}g^{(3)}(c)t^3$$

すなわち

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}\sin c \cdot t^3$$

を満たす c が t と 0 の間に存在します。

III

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3}$$

を Taylor の定理または Cauchy の平均値の定理を用いて求めましょう。L'Hôpital の定理は用いてはいけません。

(解答) 問題 I から $t \neq 0$ のとき

$$\frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{3!}\cos c$$

を満たす c が 0 と t の間に存在することが分かります. $t \rightarrow 0$ のとき $c \rightarrow 0$ となるので, $\cos c \rightarrow 1$ から

$$\frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{3!} \cos c \rightarrow -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

となります.

他方, Cauchy の平均値の定理を用いるならば以下のように議論します.

$$f(t) = \sin t - t, \quad g(t) = t^3$$

とすると

$$f(0) = g(0) = 0$$

が成立します. このとき

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t) - f(0)}{g(t) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\cos \xi - 1}{3\xi^2}$$

を満たす ξ が 0 と t の間に存在します. さらに

$$f'(0) = 0, \quad g'(0) = 0$$

から

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\xi) - f'(0)}{g'(\xi) - g'(0)} = \frac{f''(\eta)}{g''(\eta)} = \frac{-\sin \eta}{6\eta} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{\sin \eta}{\eta}$$

を満たす η が ξ と 0 の間に存在します. $x \rightarrow 0$ のとき $\xi \rightarrow 0$ となり, さらに $\eta \rightarrow 0$ となります. このとき

$$\frac{\sin \eta}{\eta} \rightarrow 1$$

となりますから,

$$\frac{f(t)}{g(t)} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{\sin \eta}{\eta} \rightarrow -\frac{1}{6}$$

であることが分かります.

VI $f(t) = \sin t$ に 4 階の Taylor の定理を適用して不等式

$$\sin t > t - \frac{1}{3!}t^3 \quad (0 < t < \pi)$$

を示しましょう.

(解答)

$$f(t) = \sin t, \quad f'(t) = \cos t, \quad f''(t) = -\sin t, \quad f^{(3)}(t) = -\cos t, \quad f^{(4)}(t) = \sin t$$

から

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1$$

であることが分かります. 従って $t \neq 0$ のとき, 特に $0 < t < \pi$ のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)t^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c)t^4$$

すなわち

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}\sin c \cdot t^4$$

を満たす c が 0 と t の間に存在します。このとき

$$0 < c < \pi$$

が成立しますから $\sin c > 0$ であることが分かります。他方 $x > 0$ から $x^4 > 0$ となりますから

$$\frac{1}{4!}\sin c \cdot t^4 > 0$$

であることが分かり、

$$\sin t > t - \frac{1}{3!}t^3 \quad (0 < t < \pi)$$

が従います。

V

$$\varphi(x) = -\frac{x}{2} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2}$$

が

$$x^2 + x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 1 = 0$$

が成立することを用いて $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ を x と $\varphi(x)$ で表しましょう。

(解答)

$$x^2 + x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 1 \equiv 0 \tag{1}$$

の両辺を x で微分すると

$$2x + 1 \cdot \varphi(x) + x \cdot \varphi'(x) + 2\varphi(x)\varphi'(x) \equiv 0 \tag{2}$$

から

$$\varphi'(x) = -\frac{2x + \varphi(x)}{x + 2\varphi(x)} \tag{3}$$

が従います。(2) を x で微分すると

$$2 + \varphi'(x) + 1 \cdot \varphi'(x) + x\varphi''(x) + 2\varphi'(x)^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) \equiv 0$$

すなわち

$$2 + 2\varphi'(x) + 2\varphi'(x)^2 + (x + 2\varphi(x))\varphi''(x) \equiv 0$$

から

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= -\frac{2 + 2\varphi'(x) + 2\varphi'(x)^2}{x + 2\varphi(x)} \\ &= -2 \cdot \frac{3x^2 + 3x\varphi(x) + 3\varphi(x)^2}{(x + 2\varphi(x))^3} \\ &= -\frac{6}{(x + 2\varphi(x))^3} \end{aligned}$$

となります。

VI

$$\varphi(x) = \frac{1-x}{x-2}$$

が

$$x\varphi(x) + x - 2\varphi(x) - 1 = 0$$

を満たすことを用いて以下を考えましょう。

(1)

$$\varphi'(x) = \frac{1+\varphi(x)}{2-x}$$

が成立することを示しましょう。

(2) $\varphi''(x)$ を x と $\varphi(x)$ で表しましょう。

(解答) (1)

$$x\varphi(x) + x - 2\varphi(x) - 1 \equiv 0$$

の両辺を x で微分すると

$$1 \cdot \varphi(x) + x\varphi'(x) + 1 - 2\varphi'(x) \equiv 0 \quad (\text{i})$$

すなわち

$$\varphi(x) + (x-2)\varphi'(x) \equiv 0 \quad (\text{ii})$$

となります。 $\varphi(x) \neq 2$ ですから

$$\varphi'(x) = -\frac{\varphi(x)+1}{x-2} \quad (\text{iii})$$

であることが分かります。

(2) (ii) 式の両辺を微分して

$$\varphi'(x) + 1 \cdot \varphi'(x) + (x-2)\varphi''(x) \equiv 0$$

から

$$\varphi''(x) = \frac{-2\varphi'(x)}{x-2} = \frac{2(\varphi(x)+1)}{(x-2)^2}$$

となります。

VII $\varphi(x)$ が

$$x^2 - x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 3 = 0$$

を満たすことを用いて、 $\varphi'(x)$ と $\varphi''(x)$ を x と $\varphi(x)$ で表しましょう。

(解答)

$$x^2 - x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 3 \equiv 0$$

の両辺を x で微分して

$$2x - 1 \cdot \varphi(x) - x\varphi'(x) + 2\varphi(x)\varphi'(x) \equiv 0 \quad (1)$$

すなわち

$$2x - \varphi(x) - (x - 2\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0 \quad (2)$$

を得ます。これから

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x) - 2x}{2\varphi(x) - x}$$

であることが分かります。さらに (1) 式を微分すると

$$2 - \varphi'(x) - 1 \cdot \varphi'(x) - x\varphi''(x) + 2\varphi'(x)^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) \equiv 0$$

すなわち

$$(2\varphi(x) - x)\varphi''(x) + 2 - 2\varphi'(x) + 2\varphi'(x)^2$$

を得ます。これから

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= -\frac{2 - 2\varphi'(x) + 2\varphi'(x)^2}{2\varphi(x) - x} \\ &= -\frac{6(\varphi(x)^2 - x\varphi(x) + x^2)}{(2\varphi(x) - x)^3} = -\frac{18}{(2\varphi(x) - x)^3} \end{aligned}$$

となります。