CalcNT2019
Lec13 07/10

1) $a_n \to \alpha \in \mathbb{R}$

$b_n \to +\infty$

$\Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$

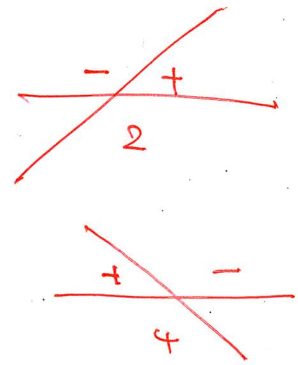
2) $\left.\begin{array}{l} a_n \to \alpha > 0 \\ b_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow a_n \cdot b_n \to +\infty$

$t \to +\infty$ a ε Z $\log t \to +\infty$

I $f(t) = \frac{2}{t} + \log t$ $\quad t > 0$

$f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t} = \frac{t-2}{t^2}$ $\quad t^2 > 0$

$f''(t) = \frac{4}{t^3} - \frac{1}{t^2} = \frac{4-t}{t^3}$ $\quad t^3 > 0$



真数条件から $t > 0$ であるので

$f'(t) \gtreqless 0 \iff t - 2 \gtreqless 0 \iff t \gtreqless 2$

$f''(t) \gtreqless 0 \iff 4 - t \gtreqless 0 \iff t \lesseqgtr 4$

となる。これから増減表は以下。

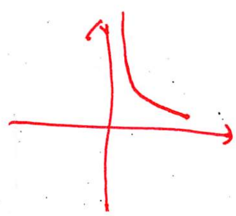
t	(0)		2		4	
f'	/	−	0	+	+	+
f''	/	+	+	+	0	−
f	/	↘		↗		↗

$1 + \log 2$ $\qquad$ $\frac{1}{2} + 2\log 2$

---

1) $t \to +\infty$ のとき $\frac{2}{t} \to 0$, $\log t \to +\infty$ なので

$$y = \frac{2}{t} + \log t \to +\infty$$



2) $t \to +0$ のとき

$$\underbrace{\frac{2}{t}}_{+\infty} + \underbrace{\log t}_{-\infty} = \frac{1}{t}\left(2 + t\log t\right)$$

において $\frac{1}{t} \to +\infty$, $2 + \underbrace{\boxed{t\log t}}_{\to 0} \to 2 + 0 = 2 > 0$

なので

$$y = \frac{1}{t}\left(2 + t\log t\right) \to +\infty$$

がわかる。

$t \to +0$ のとき $t \log t \to 0$

$\boxed{s = -\log t} \to +\infty$ $\quad t = e^{-s}$

$$t \log t = e^{-s}(-s) = -\frac{s}{e^{s}} \to 0$$

$t \to +\infty$ のとき $\dfrac{t}{e^{t}} \to 0$

2階のTaylor　$a \neq b$ のとき

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(c)(b-a)^2$$

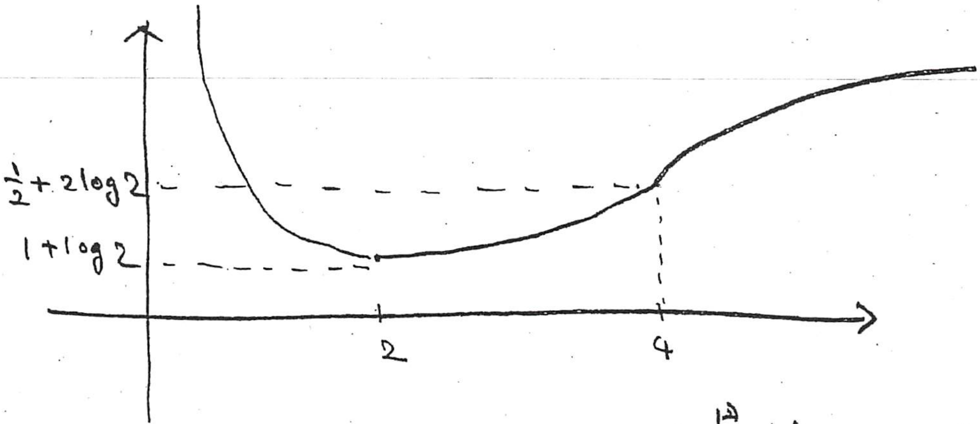
を満たす c が a と b の間に存在する.

特に $b = t$, $a = 0$ のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2} f''(c) t^2$$

を満たす c が 0 と t の間に存在する.

3) $f(2)=1+\log 2>0$ に注意すると $f(t)>0\ (t>0)$ が分かる. グラフは以下



(最後のページに GNUPlot)

II

$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\quad(t<1)$ のとき

$=(1-t)^{-\frac12}$　　$u=1-t$ のとき $\dfrac{du}{dt}=-1$

$$f'(t)=\cancel{-}\frac12\cdot\frac{1}{(1-t)^{\frac32}}\cdot(-1)=\frac12\cdot\boxed{\frac{1}{(1-t)^{\frac32}}}=(1-t)^{-\frac32}$$

$$f''(t)=\frac12\cdot\left(-\frac32\right)\frac{1}{(1-t)^{\frac52}}\cdot(-1)$$

$$=\frac34\cdot\frac{1}{(1-t)^{\frac52}}$$

$f'(0)=\frac12$

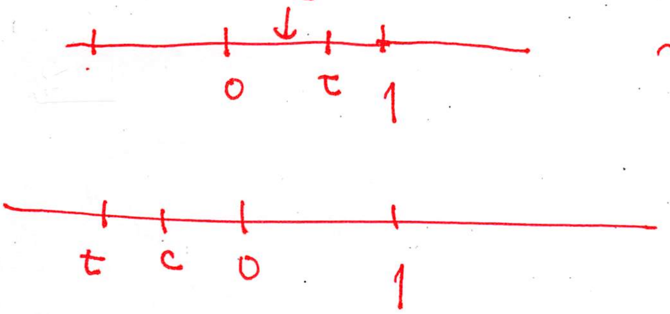
$f(0)=1$

c

となる. $t<1$ かつ $t\neq0$ を満たすとき

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}}=1+\frac12 t+\frac38\cdot\frac{1}{(1-c)^{\frac52}}t^2\qquad \frac12\cdot\frac34$$

を満たす c が 0 と t の間に存在する.

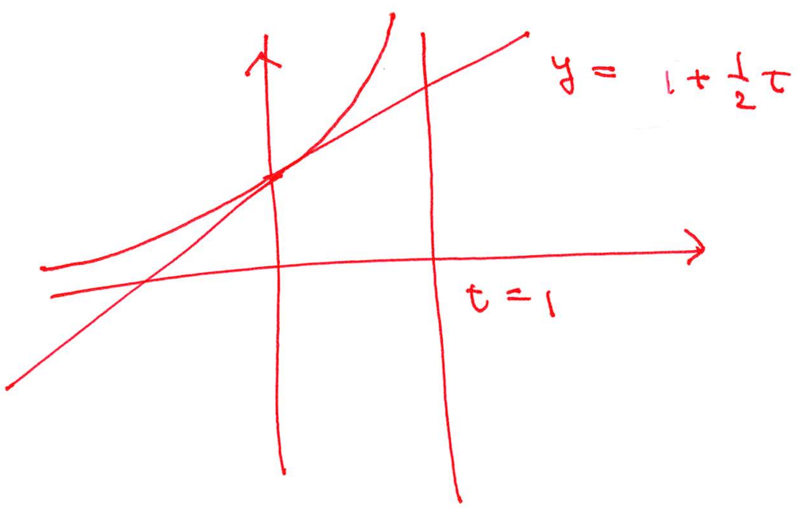


$c<1$

剰余項 $t\neq0$

$$\frac38\cdot\frac{1}{(1-c)^{\frac52}}t^2>0$$

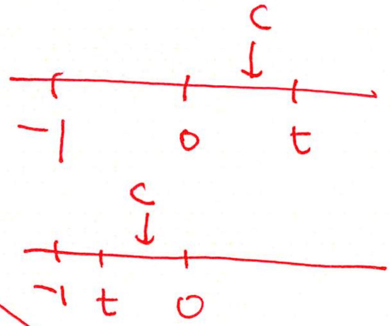
$$\rightsquigarrow\ \frac{1}{\sqrt{1-t}}>1+\frac12 t\quad(t\neq0)$$


$y = 1 + \frac{1}{2}t$
$t = 1$

$u=1+t$ のとき $\frac{du}{dt}=1$

III $f(t)=\log(1+t)$ $(t>-1)$

$1+t>0$



のとき

$$f'(t)=\frac{1}{1+t},\quad f''(t)=-\frac{1}{(1+t)^2}$$

cを代入

となる。$t>-1$ が $t\neq0$ を満たすとき、

$$\log(1+t)=t-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+c)^2}t^2$$

を満たす c が 0 と t の間に存在します。

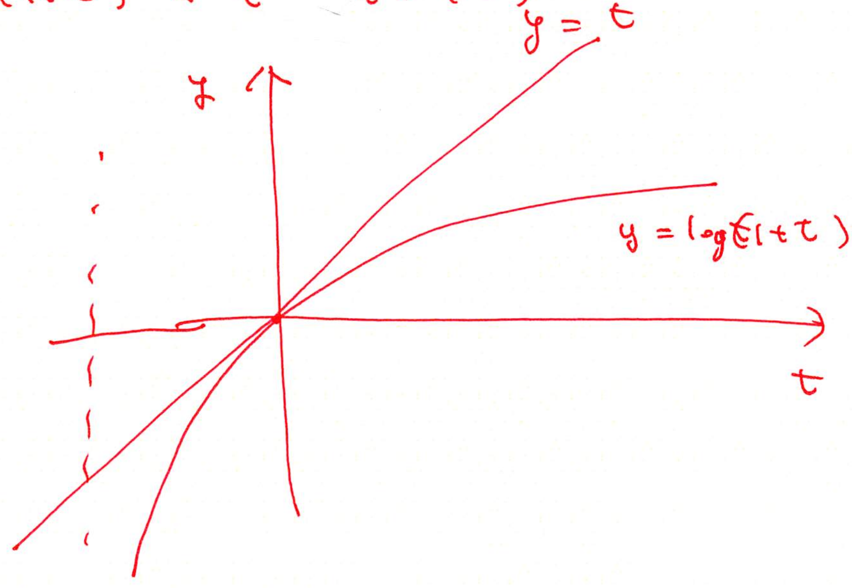
$f(0)=\log 1=0$

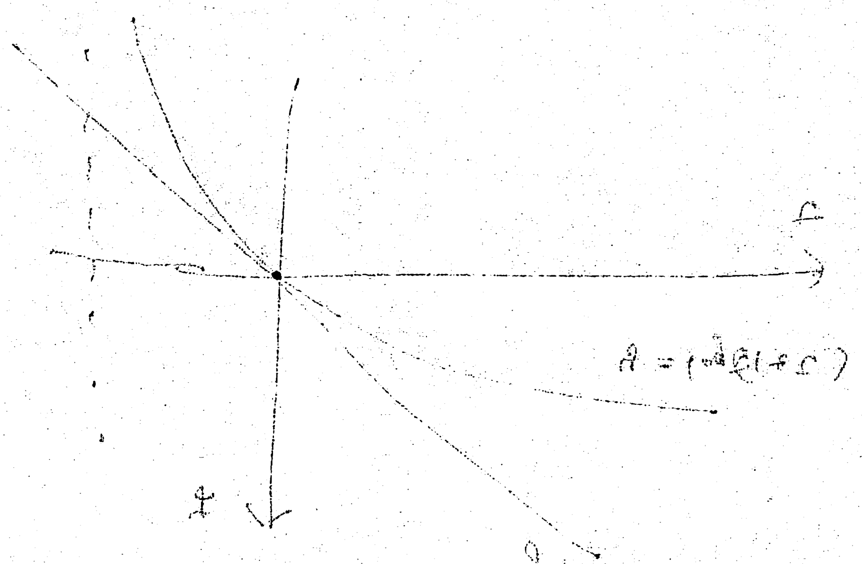
$f'(0)=\frac{1}{1+0}=1$

剰余項も負。

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+c)^2}t^2<0$$

$$\log(1+t)<t\quad(t\neq0)$$

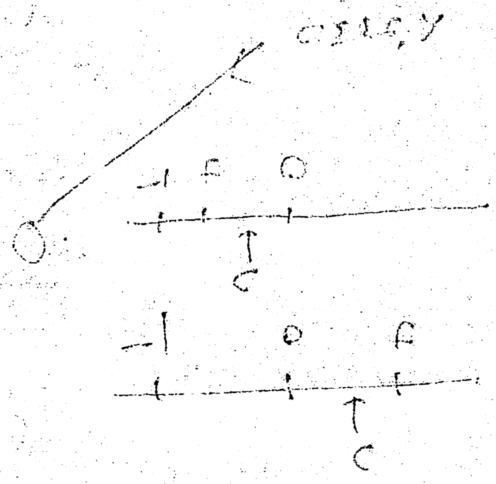




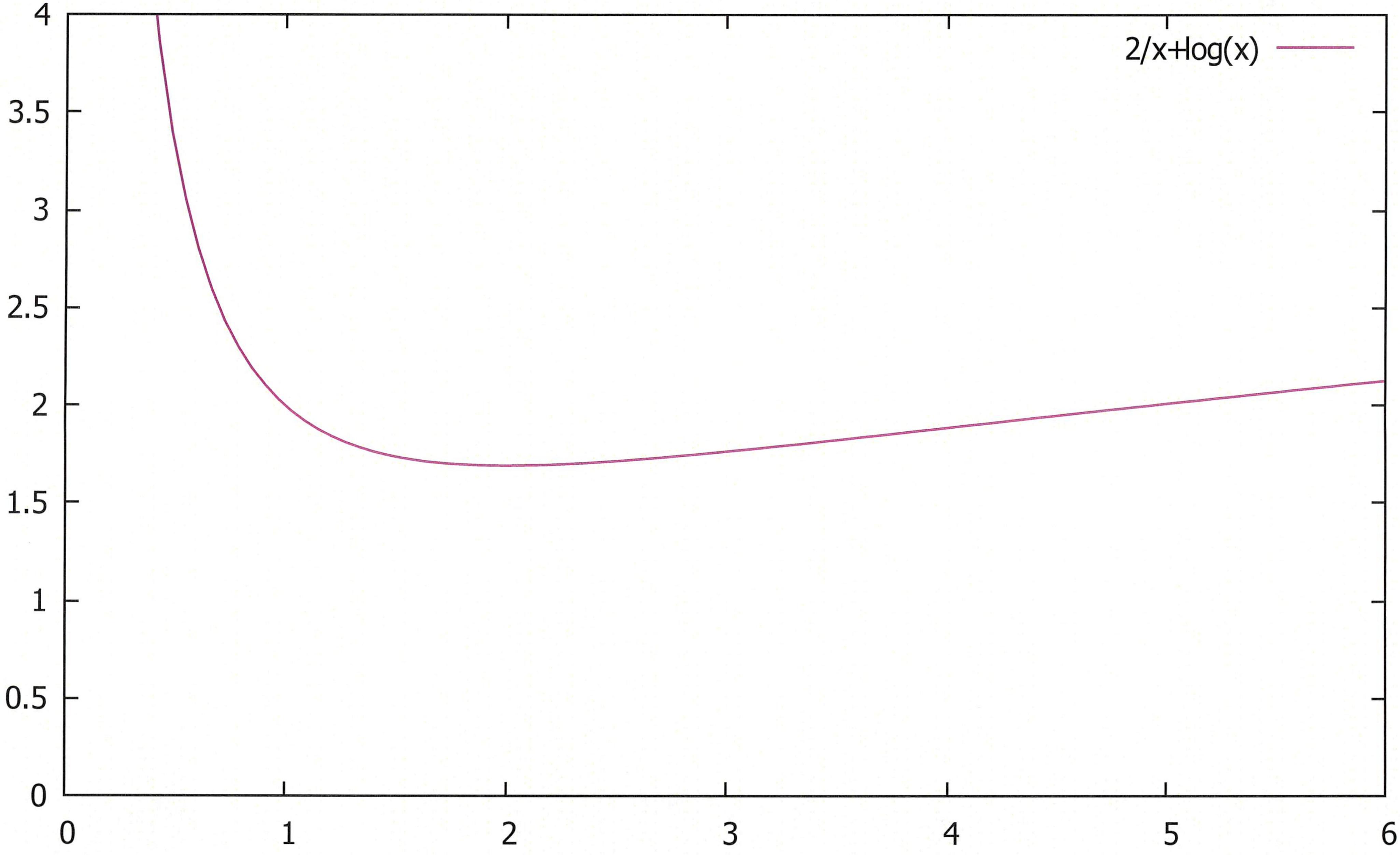
$\log(1+x) < x - \frac{1}{2}(\ldots)$

$f'(0) = \frac{1+0}{1} = 1$

$f(0) = \log 1 = 0$



$1 + x > 0$

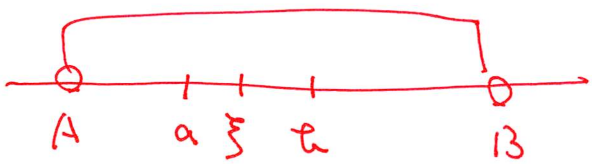

2/x+log(x)
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
1
2
3
4
5
6

Taylor の定理 (No.2))

Nobuyuki TOSE

July 04, 2017

Taylor's Theorem



Theorem

3 階微分可能な関数 $f:(A,B)\to\mathbf{R}$ があるとします．このとき $a\neq b$ を満たす $a,b\in(A,B)$ に対して a と b の間に ξ が存在して

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(b-a)^3$$

が成立します．

$b=t,\ a=0$

$$f(t)=f(0)+f'(0)\,t+\frac{f''(0)}{2!}t^2+\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}t^3$$

Proof

Proof 関数 $F(x)$ と $G(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2, \quad G(x) = (x-a)^3$$

と定義すると、高階の導関数が

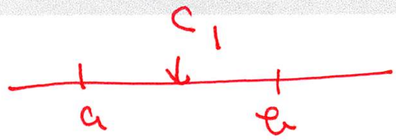
$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a), & G'(x) &= 3(x-a)^2 \\ F''(x) &= f''(x) - f''(a), & G''(x) &= 3!(x-a) \\ F^{(3)}(x) &= f^{(3)}(x), & G^{(3)}(x) &= 3! \end{aligned}$$

と計算されます．このとき Moreover we have

$$F(a) = F'(a) = F''(a) = 0, \quad G(a) = G'(a) = G''(a) = 0$$

が成立します．

Proof(2)



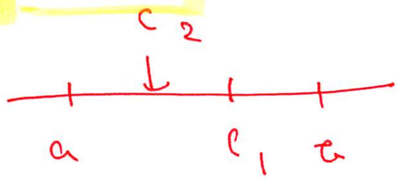
$F(a) = G(a) = 0$ が成立しますから， Cauchy の定理が適用できて

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \boxed{\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}}$$

を満たす c_1 が a と b の間に存在します．
次に $F'(a) = G'(a) = 0$ が成立しますから， Cauchy が適用できて

$$\boxed{\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \boxed{\frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}}$$

を満たす c_2 が a と c_1 の間に存在します．



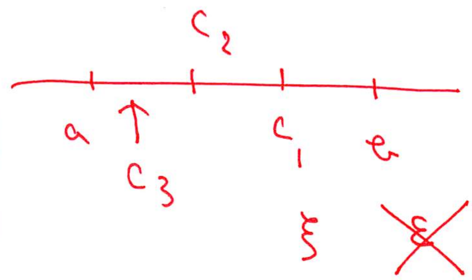
Proof(3)

最後に $F''(a)=G''(a)=0$ を用いると、 Cauchy が適用できて

$$\boxed{\frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}}=\frac{F''(c_2)-F''(a)}{G''(c_2)-G''(a)}=\boxed{\frac{F^{(3)}(c_3)}{G^{(3)}(c_3)}}$$

$=0$

を満たす c_3 が a と c_2 の間に存在します.
ここで c_3 が b と a の間にあって



$$\frac{F(b)}{G(b)}=\boxed{\frac{F^{(3)}(c_3)}{G^{(3)}(c_3)}}$$

から

$$\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)-\frac{f''(a)}{2}(b-a)^2}{(b-a)^3}=\frac{f^{(3)}(c_3)}{3!}$$

が導かれます.

Example

$f(t)=\log(1+t)$ とすると　$u=1+t$　$\frac{du}{dt}=1$

$$f'(t)=\frac{1}{1+t},\ f''(t)=-\frac{1}{(1+t)^2},\ f^{(3)}(t)=\frac{2!}{(1+t)^3}$$

から

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1$$

が成立します. 3 階の Taylor の定理を用いると $t(\neq 0)$ と 0 の間に c があって

$$\log(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{2!}{(1+c)^3}t^3$$
$$=t-\frac{1}{2}t^2+\boxed{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+c)^3}t^3}$$

$>0\ (t>0)$

$<0\ (t<0)$

が成立します.

Example(2)

$f(t) = \log(1+t)$

$t > -1$

ここで $-1 < c$ が成立することを用いると

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+c)^3}t^3 < 0 \quad (t<0), \quad \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+c)^3}t^3 > 0 \quad (t>0)$$

> 0 $\quad$ > 0

従って，不等式

$$\log(1+t) \gtrless t - \frac{1}{2}t^2 \quad (t \gtrless 0)$$

を得ます．

n 階の Taylor's

Theorem

n 階微分可能な $f:(A,B)\to\mathbf{R}$ があるとします． $a\neq b$ を満たす $a,b\in(A,B)$ に対して a と b の間に ξ が存在して

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(\cancel{\xi})}{3!}(b-a)^3$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

が成立します．

$\cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \cdots$

$b = t,\ a = 0$ 　$t \neq 0$ のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2!}f''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)t^k + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}t^n$$

を満たす c が 0 と t の間に存在する。

Examples

Example $f(t) = e^t$ に対して

$$f'(t) = e^t,\ f''(t) = e^t,\ f^{(3)}(t) = e^t, \dots, f^{(n)}(t) = e^t$$

から

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 1$$

が成立します．Taylor の定理を用いると，$\cancel{a}$ と $\cancel{b}$ の間に c が存在して

0 t

t≠0のとき.

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{1}{n!}e^c t^n$$

$\frac{1}{3!}t^3 +$

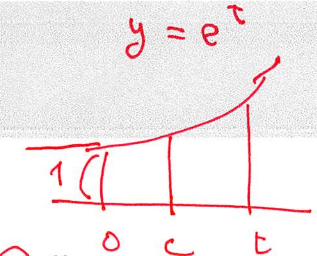
$= f^{(n)}(c)$

が成立します．これを用いると

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0$$

を示すことができます．

Applications(2)



実際，$t > 0$ のとき

0 c t

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{1}{n!}e^c t^n$$

$\geq e^0 = 1$ $\qquad e^c > e^0 = 1$

$$> \boxed{1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}} + \frac{1}{n!}t^n > \frac{1}{n!}t^n$$

≥ 0

が導かれます．これから We have also

$e^t > \frac{1}{n!}t^n \quad (t > 0)$

$$e^t > \frac{1}{(n+1)!}t^{n+1} \quad (t > 0)$$

も分かります．

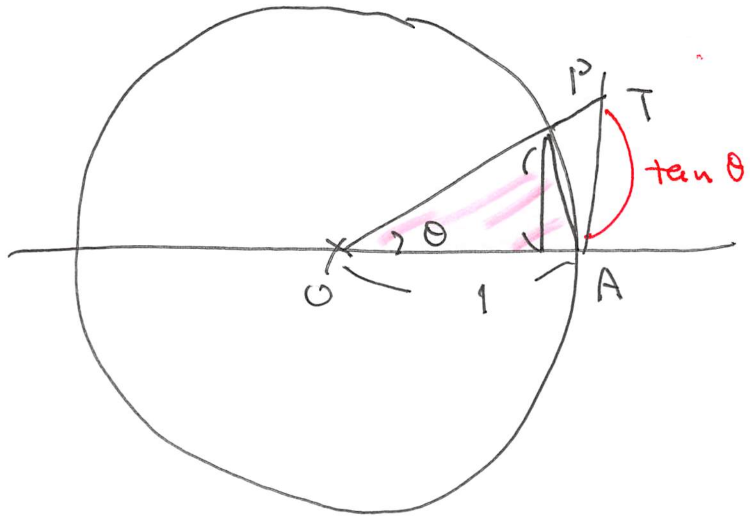
$$0 \leftarrow 0 < \frac{t^n}{e^t} < \frac{t^n}{\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{t} \to 0$$

において $\frac{1}{t} \to 0\ (t \to +\infty)$ であることを用いると

$$\frac{t^n}{e^t} \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

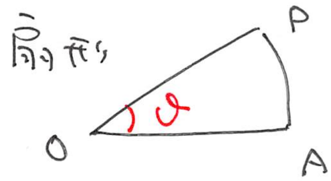
$\theta \to 0$ のとき $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$



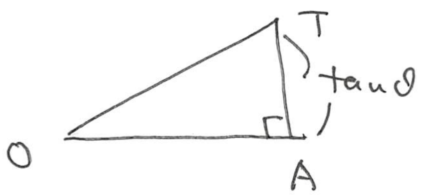
$\triangle OAP = \dfrac{1}{2}\sin\theta$

$\wedge$



$= \dfrac{1}{2}\theta$

$\wedge$



$= \dfrac{1}{2}\tan\theta$

$$\sin\theta < \theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

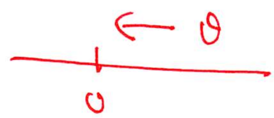
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\sin\theta > 0$

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

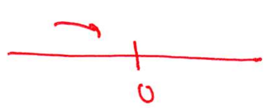
$\cos\theta \to 1 \quad (\theta \to 0)$

$$\frac{\theta}{\sin\theta} \to 1 \quad (\theta \to +0)$$

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to +0)$$



$\tau = -\theta$ とする $\theta \to -0$ のとき $\tau \to +0$



$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin(-\tau)}{-\tau} = \frac{-\sin\tau}{-\tau} = \frac{\sin\tau}{\tau} \to 1$$

$\theta \to 0$ のとき $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1$

$h \to 0$

$$\frac{\sin(\theta + h) - \sin\theta}{h}$$

$$= \frac{\sin\theta \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos\theta - \sin\theta}{h}$$

$$= \sin\theta \boxed{\frac{\cos h - 1}{h}} + \cos\theta \cdot \boxed{\frac{\sin h}{h}} \to \cos\theta \quad (h \to 0)$$

$$= h \cdot \frac{\cos h - 1}{h^2} \to 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \downarrow \; 1$$

$$1 - \cos h = 1 - \left(\cos^2\frac{h}{2} - \sin^2\frac{h}{2}\right)$$

$$= 2\sin^2\frac{h}{2}$$

$h \to 0$ のとき $\dfrac{h}{2} \to 0$

$$\frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \to \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

$$(\sin\theta)' = \cos\theta$$

$(\cos\theta)' = -\sin\theta$ ← 宿題.

I $(\tan\theta)' = ?$

II (1) $f(t) = \log(1+t)$ に対して $b=t,\ a=0$ で
4階の Taylor の定理を適用.

(2) $\log(1+t) < t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \quad (t \neq 0)$
を示す.

III $f(t) = \dfrac{1}{1-t}\ (t \neq 1)$

$b=t$ で $a=0$ の場合
$t=0$ において 3階の
Taylor の定理を適用