

2019年7月3日演習問題解答

I 関数

$$f(t) = \log(1+t)$$

に対して  $t=0$  において Taylor の定理を  $n=4$  で適用しましょう。

(解答)

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}, f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}, f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}, f^{(4)}(t) = -\frac{3!}{(1+t)^4},$$

から

$$f(0) = \log 1 = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 2$$

となります。4階の Taylor の定理から  $t \neq 0$  のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)t^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c)t^4$$

すなわち

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+c)^4}t^4$$

を満たす  $c$  が  $0$  と  $t$  の間に存在する。

II 関数

$$f(t) = \frac{1}{1+t}$$

に対して  $t=0$  において Taylor の定理を  $n=4$  で適用しましょう。

(解答)

$$f'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}, f''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}, f^{(3)}(t) = -\frac{3!}{(1+t)^4}, f^{(4)}(t) = \frac{4!}{(1+t)^5},$$

から

$$f(0) = 1, f'(0) = -1, f''(0) = 2, f^{(3)}(0) = -3!$$

を得るので、4階の Taylor の定理から  $t \neq 0$  のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)t^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c)t^4$$

すなわち

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \frac{1}{(1+c)^5}t^4$$

を満たす  $c$  が  $0$  と  $t$  の間に存在する。

III 関数  $f(t) = te^t$  に対して高次の導関数  $f^{(n)}(t)$  を求めましょう。

(解答)

$$f'(t) = 1 \cdot e^t + t \cdot e^t = (t+1)e^t, \quad f''(t) = 1 \cdot e^t + (t+1) \cdot e^t = (t+2)e^t, \\ f^{(3)}(t) = 1 \cdot e^t + (t+2) \cdot e^t = (t+3)e^t$$

から

$$f^{(n)}(t) = (t+n)e^t \quad (15)$$

と推測できる. 実際 (15) を微分して

$$f^{(n+1)} = 1 \cdot e^t + (t+n) \cdot e^t = (t+n+1)e^t$$

と (15) の  $n$  を  $n+1$  にずらした結果となるので, 数学的帰納法によって (15) がすべての  $n \in \mathbf{N}$  に対して成立することが示された.

**IV** Taylor の定理を用いて不等式

$$e^t > 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 \quad (t \neq 0)$$

を示しましょう.

(解答)

$$f'(t) = f''(t) = f^{(3)}(t) = f^{(4)}(t) = e^t$$

から

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 1$$

が分かる. 4 階の Taylor の定理より  $t \neq 0$  のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}t^4$$

すなわち

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}e^c t^4$$

を満たす  $c$  が  $0$  と  $t$  の間に存在する. ここで  $t \neq 0$  であることから, 4 階の剰余項について

$$\frac{1}{4!}e^c t^4 > 0$$

であることが従うので

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}e^c t^4 > 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3$$

が成立する.

**V(1)**  $f(t) = \sqrt{1+t}$  に対して  $f'(t)$ ,  $f''(t)$ ,  $f^{(3)}(t)$  を求めましょう.

**(2)**  $t > 0$  のとき不等式

$$1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 < \sqrt{1+t} < 1 + \frac{1}{2}t$$

が成立することを示しましょう. ただし Taylor の定理を用いましょう.

(解答) (1)

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}} \\f''(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+t)\sqrt{1+t}} \\f^{(3)}(t) &= -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{1}{(1+t)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(1+t)^2\sqrt{1+t}}\end{aligned}$$

(2) (1) を用いると

$$f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}$$

が成立します。2 階の Taylor の定理を用いると

$$\begin{aligned}\sqrt{1+t} = f(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(c_1)t^2 \\&= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(1+c_1)\sqrt{1+c_1}} \cdot t^2\end{aligned}$$

を満たす  $c_1$  が存在して  $0 < c_1 < t$  を満たします。ここで

$$-\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(1+c_1)\sqrt{1+c_1}} \cdot t^2 < 0$$

から

$$\sqrt{1+t} < 1 + \frac{1}{2}t$$

が従います。他方、3 階の Taylor の定理を用いると

$$\begin{aligned}\sqrt{1+t} = f(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c_2)t^3 \\&= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} \cdot t^2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(1+c_2)^2\sqrt{1+c_2}} \cdot t^3\end{aligned}$$

を満たす  $c_2$  が存在して  $0 < c_2 < t$  を満たします。このとき

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(1+c_2)^2\sqrt{1+c_2}} \cdot t^3 > 0$$

から

$$\sqrt{1+t} > 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2$$

が従います。

VI 不等式

$$t - \frac{t^2}{2} < \log(1+t) < t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \quad (t > 0)$$

を示しましょう。

(解答)  $f(t) = \log(1+t)$  とすると

$$f'(t) = \frac{1}{t+1}, f''(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}, f^{(3)}(t) = \frac{2}{(t+1)^3}, f^{(4)}(t) = -\frac{3!}{(t+1)^4}$$

から

$$f(0) = \log 1 = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 2,$$

となる.  $f$  に  $t=0$  における 3 階の Taylor の定理を適用すると

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c_1)t^3$$

すなわち

$$\begin{aligned}\log(1+t) &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{2}{(1+c_1)^3}t^3 \\ &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+c_1)^3}t^3\end{aligned}$$

を満たす  $c_1$  が  $0$  と  $t$  の間に存在します. いま  $t > 0$  の場合を考えていますから

$$0 < c_1 < t$$

となることに注意しましょう. このとき  $1+c_1 > 0$ ,  $t^3 > 0$  であることから 3 階の剰余項は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+c_1)^3}t^3 > 0$$

と評価されます. 従って

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+c)^3}t^3 > t - \frac{1}{2}t^2$$

が成立することが分かる.

他方  $t=0$  における 4 階の Taylor の定理を適用すると

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)t^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c_2)t^4$$

すなわち

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!} \cdot 2t^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3!}{(1+c_2)^4}t^3 = t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+c_2)^3}t^4$$

を満たす  $c_2$  が  $0$  と  $t$  の間に存在します. いま  $t > 0$  の場合を考えていますから  $0 < c_2 < t$  となることに注意しましょう. このとき  $1+c_2 > 0$ ,  $t^4 > 0$  であることから 4 階の剰余項は

$$-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+c_2)^3}t^4 < 0$$

と評価されます (実は, この評価には  $t > 0$  を使いません)\*2. 従って

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+c_2)^4}t^4 < t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

が成立することが分かる.

---

\*2  $-1 < t < 0$  の場合は  $-1 < t < c_2 < 0$  となりますから,  $1+c_2 > 0$  であることが分かります.