$+ \quad - \quad +$

$-2-\sqrt{2} \qquad -2+\sqrt{2}$

t^2+4t+2

$= (t+2)^2-2$

2019 年 6 月 26 日小テスト解答

$\dfrac{t^4}{e^t} \to 0 \quad (t \to +\infty)$

I 関数 $y = t^2 e^t$ の増減表を求めましょう．

（解答） 関数 $y = t^2 e^t$ の微分を求めると

$$y' = 2t \cdot e^t + t^2 e^t = \boxed{t(t+2)} e^t$$

t^2+2t

$+ \quad - \quad +$

$-2 \qquad 0$

$$y'' = (2t+2)e^t + t(t+2)e^t = \boxed{(t^2+4t+2)} e^t$$
$$= \{t-(-2+\sqrt{2})\} \cdot \{t-(-2-\sqrt{2})\} e^t$$

となります．$e^t > 0$ が常に成立しますから

$$y' \gtreqless 0 \Leftrightarrow t(t+2) \gtreqless 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t < -2, t > 0 \\ t = -2, 0 \\ -2 < t < 0 \end{array} \right\}$$

$$y'' \gtreqless 0 \Leftrightarrow \{t-(-2+\sqrt{2})\} \cdot \{t-(-2-\sqrt{2})\} \gtreqless 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t < -2-\sqrt{2}, t > -2+\sqrt{2} \\ t = -2 \pm \sqrt{2} \\ -2-\sqrt{2} < t < -2+\sqrt{2} \end{array} \right\}$$

と y' および y'' の符号が別れますから，以上で増減表は下図となります．

さらに $t \to +\infty$ のとき $t^2 \to +\infty, e^t \to +\infty$ から

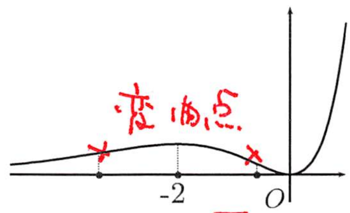
$$y = t^2 e^t \to +\infty$$

が従います．また $t \to -\infty$ のとき $s = -t \to +\infty$ ですから

$y = t^2 e^t$

$$y = (-s)^2 e^{-s} = \frac{s^2}{e^s} \to 0$$

が従います．以上からグラフは下図となります．（技術的な問題から極大点，極小点，変曲点の座標の全ては記述していません．）



$\sqrt{2} < 2 = \sqrt{4} \to -2+\sqrt{2} < 0$

		$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0	
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	⤴	$(6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$	↱	$4e^{-2}$	↴	$(6-4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$	↳	0	⤴

VIII $y = t^2 \log t$ に対して凹凸を含めて増減表を求めましょう．

（解答） 関数 $y = t^2 \log t$ の導関数と 2 階の導関数を求めると

$$y' = (t^2)' \log t + t^2 (\log t)'$$
$$= 2t \log t + t^2 \cdot \frac{1}{t}$$
$$= 2t \log t + t = 2t(\log t + \frac{1}{2})$$

OK

$t > 0$ 真数条件.

$$y'' = (2t)'(\log t + \frac{1}{2}) + 2t \cdot (\log t + \frac{1}{2})'$$
$$= 2(\log t + \frac{1}{2}) + 2t \cdot \frac{1}{t}$$
$$= 2(\log t + \frac{1}{2}) + 2 = 2(\log t + \frac{3}{2})$$

$$\frac{t}{e^t} \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

$t = e^{-s}$

を得ます．これから

$$\begin{aligned} y' \gtreqqless 0 &\Longleftrightarrow \log t + \frac{1}{2} \gtreqqless 0 \\ &\Longleftrightarrow \log t \gtreqqless -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow t \gtreqqless e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' \gtreqqless 0 &\Longleftrightarrow \log t + \frac{3}{2} \gtreqqless 0 \\ &\Longleftrightarrow \log t \gtreqqless -\frac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow t \gtreqqless e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

が分かり、次の増減表を得ます．変曲点

t		$e^{-\frac{3}{2}}$		$e^{-\frac{1}{2}}$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\searrow$	$-\frac{3}{2e^3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$

さらに $t \to +\infty$ のとき $t^2 \to +\infty$, $\log t \to +\infty$ なので

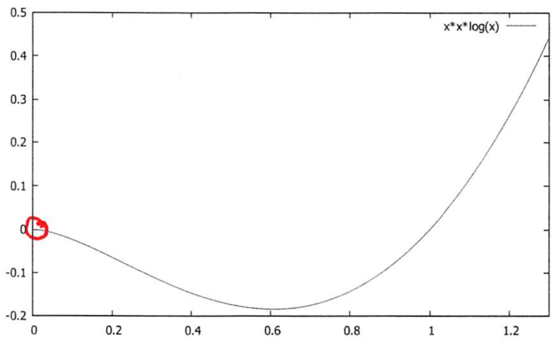
$$y = t^2 \cdot \log t \to +\infty$$

発散．

となります．また $t \to +0$ のとき $s = -\log t \to +\infty$ ですから

$$y = t^2 \log t = e^{-2s}(-s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{e^{2s}} \to -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

となります．



$$\boxed{\log t \to +\infty \quad (t \to +\infty)}$$

$\forall R > 1$ $\quad \log t > R \Leftrightarrow t > e^R$

$t > e^R \Rightarrow e^t > R$

$\forall R$

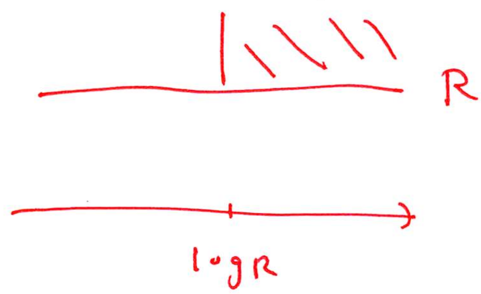
e^R

$$e^t \to +\infty \quad (t \to +\infty)$$

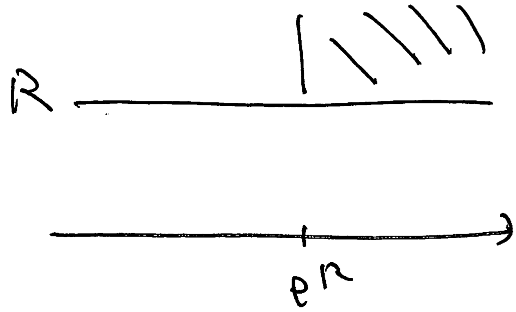
$\forall R > 1$

$$e^t > R$$
$$\Updownarrow$$
$$t > \log R$$

$$t > \log R \Rightarrow e^t > R$$



$t \to +\infty$ のとき $\log t \to +\infty$



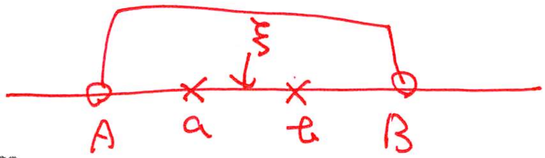
$\forall R > 1$ とする

$\log t > R \iff t > e^R$

を使うと

$t > e^R \Rightarrow \log t > R.$

Taylor の定理



Theorem

2 階微分可能な $f:\ (A,B)\to \mathbf{R}$ が与えられているとき，$a\neq b$ を満たす $a,b\in(A,B)$ に対して a と b の間に ξ が存在して

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(b-a)^2$$

が成立します．

平均値の定理

$f(b)=f(a)+f'(\xi_0)(b-a)$

をみたす ξ_0 が a と b の間に存在．

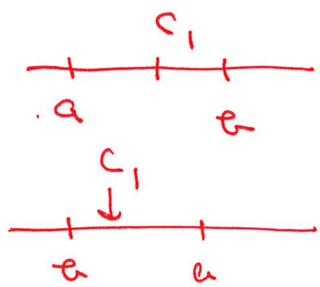
Proof

Proof 2 つの関数

$$F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a),\quad G(x)=(x-a)^2$$

を定義します．このとき $F(a)=G(a)=0$ が成立することに注意しましょう．このことから Cauchy の定理が適用できて

$$\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F(b)-\underbrace{\boxed{F(a)}}_{=0}}{G(b)-\underbrace{\boxed{G(a)}}_{=0}}=\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}$$



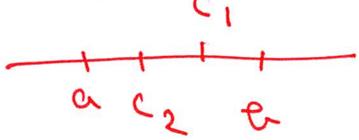
が a と b の間のある c_1 に対して成立します．

Proof(2)

次に F と G を微分して

$$F'(x) = f'(x) - f'(a), \quad G'(x) = 2(x-a)$$

から



$$F'(a) = 0, \quad G'(a) = 0.$$

が分かります．これがあるので Cauchy の定理が適用できて

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \cdots = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - \boxed{F'(a)}^{=0}}{G'(c_1) - \boxed{G'(a)}_{=0}} = \boxed{\frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}} = \frac{f''(c_2)}{2}$$

を満たす c_2 が c_1 と a の間に存在することが分かります．ここで

$$F''(x) = f''(x) \text{ and } G''(x) = 2$$

から

$$\frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} = \boxed{\frac{f''(c_2)}{2}}$$

が従います．

Applications

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) = \frac{1}{2} f''(c_2)(b-a)^2$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(c_2)(b-a)^2$$

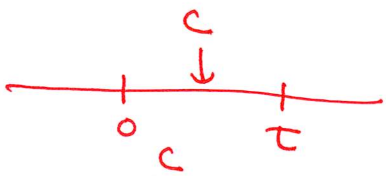
Example $f(t) = e^t$ とすると

$$f'(t) = e^t, \; f''(t) = e^t, \; f^{(3)}(t) = e^t, \ldots, f^{(n)}(t) = e^t$$

ここで Taylor の定理を用いると 0 と t の間に

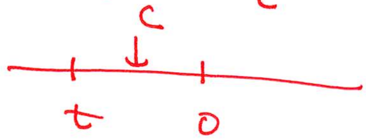
$a=0$, $b=t \neq 0$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2} e^c t^2$$



を満たす c が存在することが分かります．

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2} e^c t^2$ を



満たす c が 0 と t の間にある．

Applications(2)

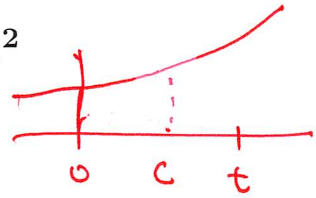
これを用いると

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

$\frac{t^4}{e^t} \to 0$ $(t \to +\infty)$

を示すことができます．$t>0$ のとき

$$e^t=1+t+\frac{1}{2}e^c t^2>\underbrace{\boxed{1+t}}_{>0}+\frac{1}{2}t^2>\frac{1}{2}t^2$$



から

$$0 \leftarrow \quad 0<\frac{t}{e^t}<\frac{t}{\frac{1}{2}t^2}=\frac{2}{t} \quad \to 0$$

が従いますが，$\frac{2}{t}\to 0\ (t\to+\infty)$ が成立しますから　はさみうちの定理.

$$\frac{t}{e^t}\to 0 \quad (t\to+\infty)$$

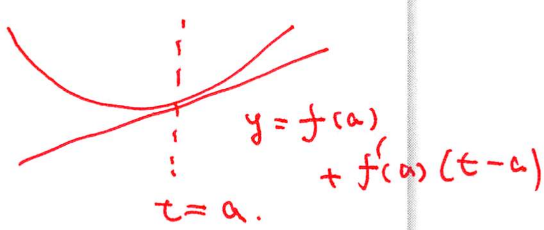
となります．

Applications(3)

Theorem

2 階微分可能な関数 $f:\ (A,B)\to\mathbf{R}$ に対して

$$f''(t)>0 \quad (t\in(A,B))$$

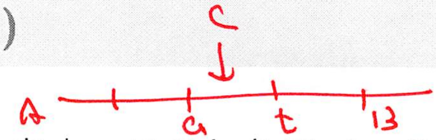


を仮定します．このとき不等式

$$f(t)>f(a)+f'(a)(t-a) \quad (t\neq a)$$

が成立します．

Applications(4)



Proof $t, a \in (A, B)$ が $t \neq a$ を満たすとします．このとき Taylor の定理を用いると t と a の間に

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \underbrace{\frac{1}{2}\overbrace{f''(c)}^{>0}\underbrace{(t-a)^2}_{>0}}_{\text{剰余項 residual term}}$$

を満たす c が存在することが分かります．ここで不等式

$$\frac{1}{2}f''(c)(t-a)^2 > 0$$

が成立することを用いると

$$f(t) > f(a) + f'(a)(t-a)$$

が従います.

$y = f(t) = \sqrt{1+t} = \sqrt{u} \qquad u = 1+t$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{u\sqrt{u}} \cdot 1 = -\frac{1}{4} \frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}$$

apply

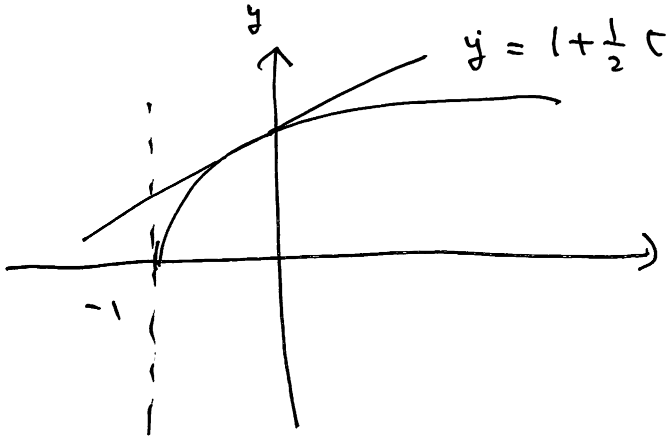
$a = 0$, $b = t$ で 2階の Taylor の定理を適用すると

$$\sqrt{1+t} = f(0) + f'(0) \cdot t + \frac{1}{2} f''(c) t^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(1+c)^{\frac{3}{2}}} t^2$$

$|t|$ 小のとき

$\sqrt{1+t} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2} t$ に近似出来る.



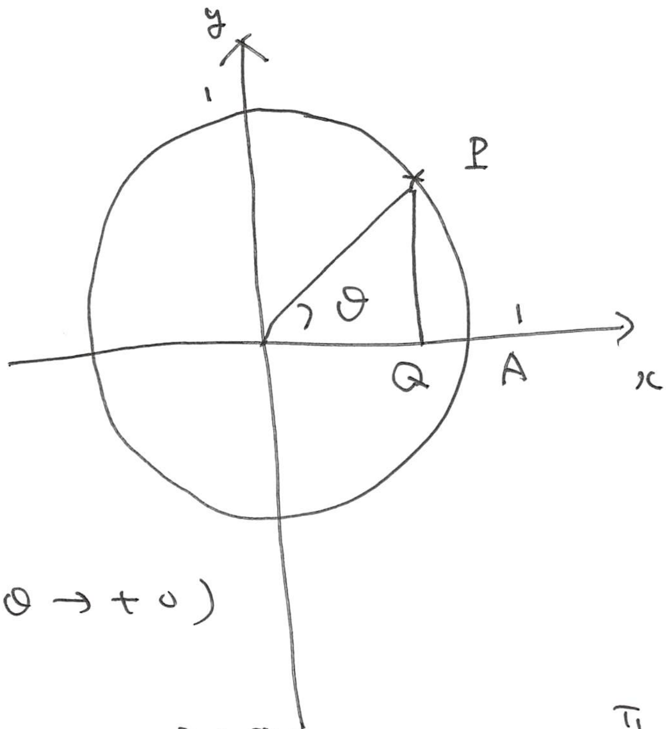
$$\boxed{\sin\theta \to 0 \quad (\theta \to 0)}$$

66p.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\overset{\frown}{AP} = \theta$

$PQ = \sin\theta$



$$\begin{array}{ccccc} 0 & < & \sin\theta & < & \theta \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

$\theta \to +0$

$\sin\theta \to 0 \quad (\theta \to +0)$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ $\quad$ $\tau = -\theta$ とすると $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$

$\sin\theta = \sin(-\tau) = -\sin\tau \longrightarrow -0 = 0$

$\theta \to -0$ のとき $\tau \to +0$

$\leadsto \quad \sin\theta \to 0 \quad (\theta \to 0)$

$\boxed{\cos\theta \to 1 \quad (\theta \to 0)}$ $\quad$ $\theta \to 0$ のとき $\frac{\theta}{2} \to 0$

$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \longrightarrow 0$

$\cos\theta \to 1 \quad (\theta \to 0)$

I　$f(t) = \dfrac{2}{t} + \log t$ の増減表を求める

II　$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$　　$(t < 1)$

2階のTaylorの定理を $a=0$, $x=t$ として適用する.

III　$f(t) = \log(1+t)$　　$(t > -1)$
