2019 年 6 月 26 日小テスト解答

I 関数 $y = t^2e^t$ の増減表を求めましょう．

（解答）　関数 $y = t^2e^t$ の微分を求めると

$$y' = 2t \cdot e^t + t^2e^t = t(t+2)e^t$$

$$\begin{aligned} y'' &= (2t+2)e^t + t(t+2)e^t = (t^2+4t+2)e^t \\ &= \{t-(-2+\sqrt{2})\} \cdot \{t-(-2-\sqrt{2})\}e^t \end{aligned}$$

となります．$e^t > 0$ が常に成立しますから

$$y' \gtreqless 0 \Leftrightarrow t(t+2) \gtreqless 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t < -2, t > 0 \\ t = -2, 0 \\ -2 < t < 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} y'' \gtreqless 0 &\Leftrightarrow \{t-(-2+\sqrt{2})\} \cdot \{t-(-2-\sqrt{2})\} \gtreqless 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t < -2-\sqrt{2}, t > -2+\sqrt{2} \\ t = -2 \pm \sqrt{2} \\ -2-\sqrt{2} < t < -2+\sqrt{2} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

と y' および y'' の符号が別れますから，以上で増減表は下図となります．

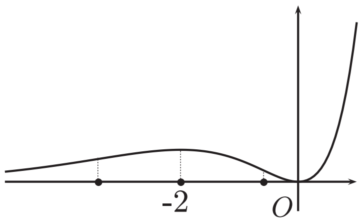
さらに $t \to +\infty$ のとき $t^2 \to +\infty$, $e^t \to +\infty$ から

$$y = t^2e^t \to +\infty$$

が従います．また $t \to -\infty$ のとき $s = -t \to +\infty$ ですから

$$y = (-s)^2e^{-s} = \frac{s^2}{e^s} \to 0$$

が従います．以上からグラフは下図となります．（技術的な問題から極大点，極小点，変曲点の座標の全ては記述していません．）



	$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0	
$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
	$(6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$		$4e^{-2}$		$(6-4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$		0	

VIII $y = t^2 \log t$ に対して凹凸を含めて増減表を求めましょう．

（解答）関数 $y = t^2 \log t$ の導関数と 2 階の導関数を求めると

$$\begin{aligned} y' &= (t^2)' \log t + t^2 (\log t)' \\ &= 2t \log t + t^2 \cdot \frac{1}{t} \\ &= 2t \log t + t = 2t(\log t + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= (2t)'(\log t + \frac{1}{2}) + 2t \cdot (\log t + \frac{1}{2})' \\ &= 2(\log t + \frac{1}{2}) + 2t \cdot \frac{1}{t} \\ &= 2(\log t + \frac{1}{2}) + 2 = 2(\log t + \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

を得ます．これから

$$\begin{aligned} y' \gtreqless 0 &\Longleftrightarrow \log t + \frac{1}{2} \gtreqless 0 \\ &\Longleftrightarrow \log t \gtreqless -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow t \gtreqless e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' \gtreqless 0 &\Longleftrightarrow \log t + \frac{3}{2} \gtreqless 0 \\ &\Longleftrightarrow \log t \gtreqless -\frac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow t \gtreqless e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

が分かり、次の増減表を得ます．

t		$e^{-\frac{3}{2}}$		$e^{-\frac{1}{2}}$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	⤵	$-\frac{3}{2e^3}$	↳	$-\frac{1}{2e}$	⤴

さらに $t \to +\infty$ のとき $t^2 \to +\infty$，$\log t \to +\infty$ なので

$$y = t^2 \cdot \log t \to +\infty$$

となります．また $t \to +0$ のとき $s = -\log t \to +\infty$ ですから

$$y = t^2 \log t = e^{-2s}(-s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{e^{2s}} \to -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

となります．