

2.6 Taylor の定理

2019 年 6 月 26 日演習問題解答

I 極限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(t+1) - t}{t^2}$$

を求めましょう。Cauchy の平均値の定理を用いましょう。

(解答) $F(t) = \log(t+1) - t$, $G(t) = t^2$ とすると $F(0) = G(0) = 0$ が成立します。従って Cauchy の平均値の定理を用いると

$$\frac{F(t)}{G(t)} = \frac{F(t) - F(0)}{G(t) - G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

を満たす ξ が 0 と t の間に存在します。ここで

$$F'(t) = \frac{1}{t+1} - 1, \quad G'(t) = 2t$$

から $F'(0) = G'(0) = 0$ が成立します。従って Cauchy の平均値の定理を用いると

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F'(\xi) - F'(0)}{G'(\xi) - G'(0)} = \frac{F''(\eta)}{G''(\eta)} = -\frac{1}{2(1+\eta)^2}$$

を満たす η が 0 と ξ の間に存在します。 $t \rightarrow 0$ のとき $\xi \rightarrow 0$ となり、さらに $\eta \rightarrow 0$ が従います。このとき

$$-\frac{1}{2(1+\eta)^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

となります。以上で

$$\frac{\log(1+t) - t}{t^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

が示されました。

II 関数

$$f(t) = \log(1+t)$$

に対して高次の導関数 $f^{(n)}(t)$ を求めましょう。

(解答)

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}, \quad f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}, \quad f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}, \quad f^{(4)}(t) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+t)^4}$$

から

$$f^{(n)}(t) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(t+1)^n} \tag{13}$$

と予想できる. この式を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= (-1)^{n-1}(-n) \frac{(n-1)!}{(t+1)^{n+1}} \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(t+1)^{n+1}} \\ &= (-1)^{n+1-1} \frac{(n+1-1)!}{(t+1)^{n+1}} \end{aligned}$$

となるので (13) が番号が 1 個ずれた $n+1$ で成立することが分かる. よって数学的帰納法によって (13) がすべての自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対して成立することが示された.

III 関数

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

に対して高次の導関数 $f^{(n)}(t)$ を求めましょう.

(解答)

$$f'(t) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}, \quad f''(t) = \frac{3}{2^2}t^{-\frac{5}{2}}, \quad f^{(3)}(t) = -\frac{3 \cdot 5}{2^3}t^{-\frac{7}{2}}, \quad f^{(4)}(t) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4}t^{-\frac{9}{2}}$$

から

$$f^{(n)}(t) = (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} t^{-n-\frac{1}{2}} \quad (14)$$

と予想できる. この式を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= (-1)^{n-1} \left(-n - \frac{1}{2}\right) \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} t^{-n-\frac{1}{2}-1} \\ &= (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}} t^{-n-1-\frac{1}{2}} \\ &= (-1)^{n+1-1} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2(n+1)-1)}{2^{n+1}} t^{-(n+1)-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となるので (14) が番号が 1 個ずれた $n+1$ で成立することが分かる. よって数学的帰納法によって (14) がすべての自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対して成立することが示された.

IV 関数

$$f(t) = \frac{1}{t+1}$$

に対して高次の導関数 $f^{(n)}(t)$ を求めましょう.

(解答)

$$f'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}, \quad f''(t) = \frac{2}{(t+1)^3}, \quad f^{(3)}(t) = -\frac{2 \cdot 3}{(t+1)^4}, \quad f^{(4)}(t) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(t+1)^5}$$

から

$$f^{(n)}(t) = (-1)^n \frac{n!}{(t+1)^{n+1}}$$

と推測できます。これを微分すると

$$f^{(n+1)}(t) = (-1)^{n+1} n! \frac{-(n+1)}{(t+1)^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(t+1)^{n+2}}$$

から数学的帰納法によって推測が正しいことが分かります。

V 関数

$$f(t) = \frac{1}{1+t}$$

に対して $b = t, a = 0$ の場合に 2 階の Taylor の定理を適用しましょう。

(解答)

$$f'(t) = -\frac{(t+1)^2}{(t+1)^3}, \quad f''(t) = \frac{2}{(t+1)^2},$$

から

$$f(0) = 1, f'(0) = -1$$

が分かります。Taylor の定理から

$$f(t) = f(0) + f'(0)(t-0) + \frac{1}{2}f''(c)(t-0)^2$$

が t と 0 の間の c に対して成立します。すなわち

$$\frac{1}{t+1} = 1 - t + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(c+1)^2} t^2 = 1 - t + \frac{1}{(c+1)^2} t^2$$

が t と 0 の間の c に対して成立します。

VI 極限

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log t}{t}$$

を求めましょう。

(解答) $s = \log t$ とおくと $t \rightarrow +\infty$ のとき $s \rightarrow +\infty$ となります。このとき

$$\frac{\log t}{t} = \frac{s}{e^s} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow +\infty)$$

であることが分かります。