I (1) $y = e^{\overset{\alpha t}{-3t}} = e^{u}$ と $u = \overset{\alpha t}{-3t}$ を用いて表す.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^{u} \cdot (\overset{\alpha}{-3}) = \overset{\alpha}{-3} e^{\overset{\alpha t}{-3t}}$$

(2) $y = e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{u}$ と $u = -\frac{1}{2}t^2$ を用いて表す.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^{u}(-t) = -t\, e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

(3) $y = \log(1+t^2) = \log u$ と $u = 1+t^2$ を用いて表す.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{u} \cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2}$$

$f(t) = t\, e^{2t}$

II　I (1) と同様に $(e^{2t})' = 2e^{2t}$ であることが分かる.

$$f'(t) = 1 \cdot e^{2t} + t \cdot 2e^{2t} = (2t+1)e^{2t}$$

> 0

となる. $e^{2t} > 0$ が常に成立するので

$$f'(t) \gtreqless 0 \iff 2t+1 \gtreqless 0 \iff t \gtreqless -\frac{1}{2}$$

これを用いて増減表を求める.

t		$-\frac{1}{2}$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

$f(t) = t^{\frac{1}{3}}(t-1)$

III

$$f'(t) = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}(t-1) + t^{\frac{1}{3}}\cdot 1$$

$3t^{\frac{2}{3}}\cdot t^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\left((t-1)+3t\right)$$

$$= \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}(4t-1)$$

である $t>0$ において $t^{-\frac{2}{3}}>0$ なので

$$f'(t) \gtreqless 0 \iff 4t-1 \gtreqless 0 \iff t \gtreqless \frac{1}{4}$$

であることを用いて増減表を得る.

t	(0)		$\frac{1}{4}$	
f'	/	$-$	0	$+$
f	(0)	↘	$-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$	↗

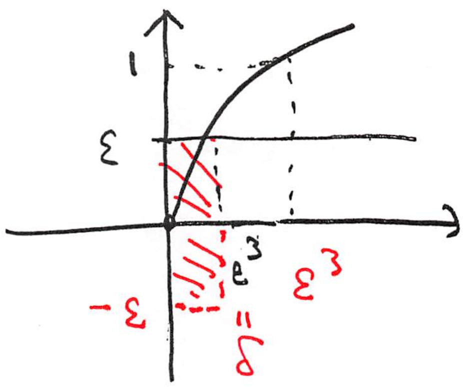
グラフ.　$t^{\frac{1}{3}} \to 0 \quad (t\to +0)$

である. $\forall \varepsilon>0$ に対して $\delta=\varepsilon^3$

とすると

$0<t<\delta=\varepsilon^3$

$$\Rightarrow \quad 0<t^{\frac{1}{3}}<\delta^{\frac{1}{3}}=\varepsilon$$



から従う. これから $t\to+0$ のとき

$$t^{\frac{1}{3}}(t-1) \to 0\cdot(-1)=0.$$

$e^t > 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n \quad (t > 0)$

(グラフ)　一般に $\frac{\cancel{e^t}}{\cancel{t^n}}$ $\frac{t^n}{e^t} \to 0 \quad (t \to +\infty)$

が成立する。(これは Taylorの定理を用いて示す。)

$$\lim_{t \to -\infty} t e^t = 0$$

が分かる　$t = -s$ とおくと $t \to -\infty$ のとき $s \to +\infty$ で

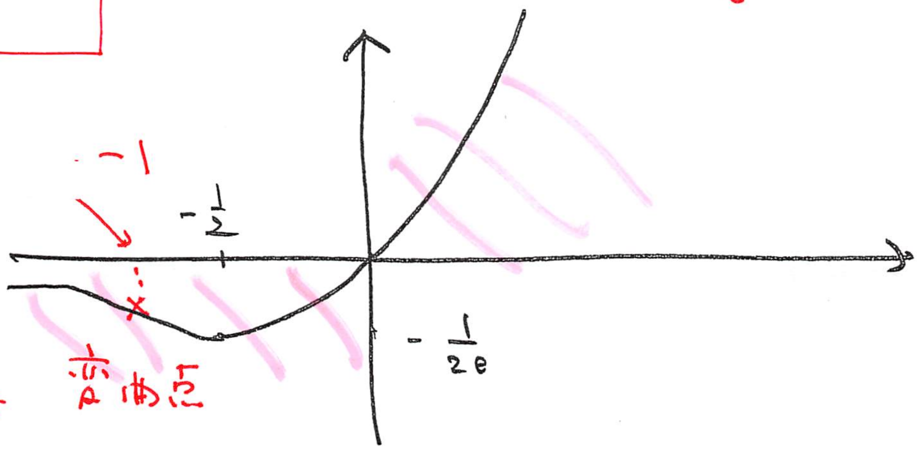
$$t e^t = -s e^{-s} = -\frac{s}{e^s} \longrightarrow 0$$

となる。$t \to +\infty$ のとき $e^t \to +\infty$ なので

$$t e^t \to +\infty$$

である

t



$u = 2t$

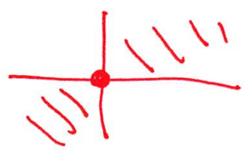
$t e^{2t} = \frac{u}{2} e^u \longrightarrow +\infty \quad (t \to +\infty)$

$t \to +\infty$ のとき $u \to +\infty$

$t \to -\infty$　$u \to -\infty$ ↗ $t e^{2t} = \frac{u}{2} e^u \to 0$

$t e^{2t} \gtreqless 0 \iff t \gtreqless 0$

$\vee$
0



$$f(t) = t e^{2t}$$

$$f'(t) = (2t+1) e^{2t}$$

$$f''(t) = 2 \cdot e^{2t} + (2t+1) \cdot 2e^{2t}$$

$$= e^{2t} \left(2 + (2t+1) \cdot 2\right)$$

$$= \underbrace{e^{2t}}_{>0} (4t+4)$$

から $f''(t) \gtreqless 0 \iff 4t+4 \gtreqless 0 \iff t \gtreqless \cancel{-\frac{3}{4}}\ -1$

		-1			
t		$\cancel{-\frac{3}{4}}$		$-\frac{1}{2}$	
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f		$\cancel{-\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{2}}}$		$-\frac{1}{2e}$	
		$-\frac{1}{e^2}$			

減少
上に凸

減少
下に凸

増加
下に凸

増加
上に凸
$f' > 0$
$f'' < 0$

$f(t) = t^{\frac{1}{3}}(t-1) = t^{\frac{4}{3}} - t^{\frac{1}{3}}$

$t > 1$ ならば ~~$t < t^{\frac{4}{3}}$ なので~~ $t \to +\infty$ のとき、

$t < t^{\frac{4}{3}}$

$$t^{\frac{4}{3}} \longrightarrow +\infty$$

$g(t) \leqq f(t)$

$(R \leqq t)$

$g(t) \to +\infty \quad (t \to +\infty)$

$\Rightarrow f(t) \to +\infty$

である　(押し出し)

$$t^{\frac{1}{3}}(t-1) = t^{\frac{4}{3}}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

において　$t \longrightarrow +\infty$ とすると

$$t^{\frac{4}{3}} \longrightarrow +\infty,\quad \left(1 - \frac{1}{t}\right) \longrightarrow 1 - 0 = 1 > 0$$

から

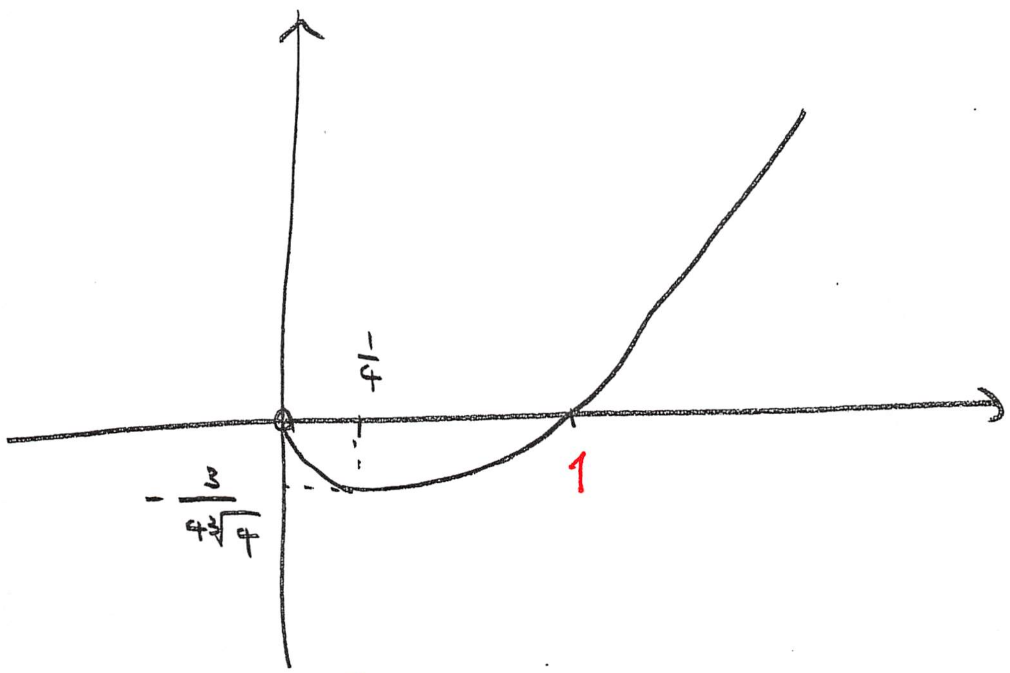
$$t^{\frac{1}{3}}(t-1) \longrightarrow +\infty$$

$a_n \to +\infty,\ b_n \to \alpha > 0$

のとき

$a_n b_n \longrightarrow +\infty$

とわかる。



$$f'(t) = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}(4t-1)$$

$$f''(t) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3} t^{-\frac{5}{3}}(4t-1) + t^{-\frac{2}{3}} \cdot 4\right)$$

$$= -\frac{1}{9} t^{-\frac{5}{3}}\{2(4t-1) - 12t\} = \frac{1}{9} t^{-\frac{5}{3}}(4t+2) > 0$$

平均値の定理

Nobuyuki TOSE

Jun 21, 2017

極小値・極大値

定義

$f: (A, B) \to \mathbf{R}$ に対して, f が $t = c \in (A, B)$ において極小値 (*minimal value*) を持つとは, ある $\delta > 0$ が存在して

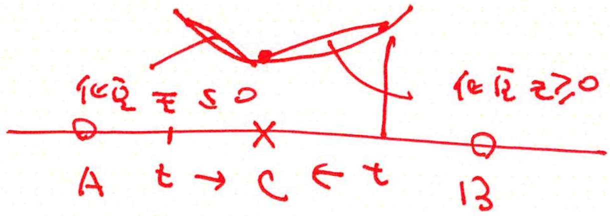
$$f(t) \geq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta).$$

が成立するときです. f が $t = c \in (A, B)$ において極大値 (*miaximal value*) を持つとは, ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(t) \leq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta).$$

が成立するときです.

定理（極大・極小の必要条件）



定理

微分可能な関数 $f:\ (A,B)\to \mathbf{R}$ が $t=c\in(A,B)$ で極小値（極大値）を持つならば

$$f'(c)=0$$

証明

証明 f が $t=c$ で極小値を持つので，ある $\delta>0$ に対して

$$f(t)\geq f(c)\quad (c-\delta<t<c+\delta).$$

が成立します．この不等式から

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\geq 0\quad (c<t<c+\delta)$$

と

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\leq 0\quad (c-\delta<t<c)$$

が従います．
ここで t を右から $t=c$ に近づけると: $t\to c+0$

$$f'(c)\geq 0$$

他方，t を左から $t=c$ に近づけると: $t\to c-0$

$$f'(c)\leq 0$$

Remark

$t = c$ の両側で定義された関数

$$g:\ (A, B) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$$

に対して

$$\lim_{t \to c} g(t) = \alpha$$

が成立するとします．このとき

$$g(t) \to \alpha \quad (t \to c + 0)$$

and

$$g(t) \to \alpha \quad (t \to c - 0)$$

Rolle の定理

Rolle の定理

関数 $f : [A, B] \to \mathbf{R}$ が条件

$$f \text{ は } [A, B] \text{ の各点で連続,}$$

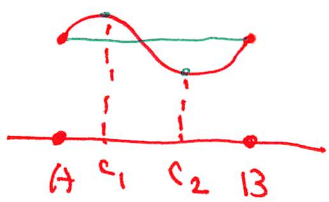
かつ

$$f \text{ は } (A, B) \text{ の各点で微分可能である}$$

を満たすとします．さらに $f(A) = f(B)$ が成立するとします．このとき，ある $c \in (A, B)$ に対して

$$f'(c) = 0$$

が成立します．



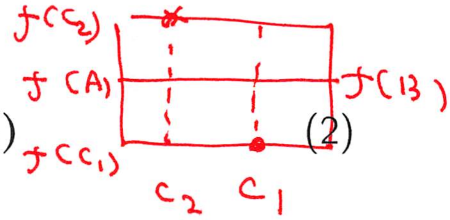
Rolleの定理–証明

連続関数に関する最大値の定理を適用すると，ある $c_1, c_2 \in [A, B]$ が

$$f(c_1) \leq f(t) \leq f(c_2) \quad (t \in [A, B]) \tag{1}$$

最小　　最大

を満たします．特に

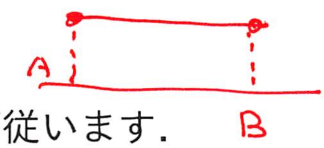


$$f(c_1) \leq f(A) = f(B) \leq f(c_2) \tag{2}$$

が成立します．

(I) $f(c_1) = f(A) = f(B)$ かつ $f(A) = f(B) = f(c_2)$ ならば

$$f(t) = f(A) = f(B) \quad (t \in [A, B])$$



と f は $[A, B]$ 上定数となり， $f'(t) = 0$ $(t \in (A, B))$ が従います．

Rolleの定理–証明 (2)

(II) (I) でないとします．このとき

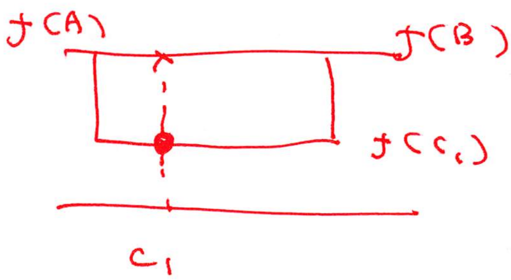
$$f(c_1) < f(A) = f(B) \quad \text{OR} \quad f(A) = f(B) < f(c_2) \tag{3}$$

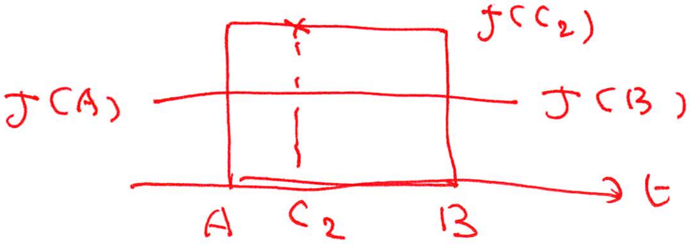
が成立します．

(II-a) 第一の場合は $A < c_1 < B$, $f'(c_1) = 0$

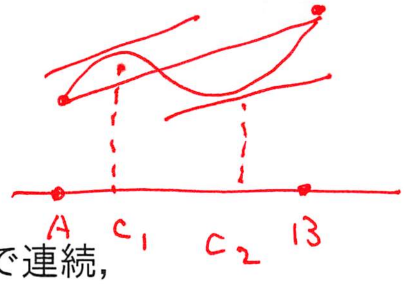
(II-b) 第二の場合は $A < c_2 < B$, $f'(c_2) = 0$.

ここで極大・極小の必要条件を用いました．





平均値の定理



平均値の定理

関数 $f : [A, B] \to \mathbf{R}$ が条件

$$f \text{ は } [A, B] \text{ の各点で連続,}$$

かつ

$$f \text{ は } (A, B) \text{ の各点で微分可能である}$$

を満たすとします．このとき，ある $c \in (A, B)$ が

$$f'(c) = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

を満たします．

平均値の定理—証明

関数 $\varphi(t)$ を

$$\varphi'(t) = f'(t) - \frac{f(B) - f(A)}{B - A} \cdot 1$$

$$\varphi(t) := f(t) - \frac{f(B) - f(A)}{B - A} \cdot (t - A)$$

と定義します．このとき Then

$$\varphi(A) = f(A) - \frac{f(B) - f(A)}{B - A} \cdot \underbrace{(A - A)}_{=0} = f(A)$$

かつ

$$\varphi(B) = f(B) - \frac{f(B) - f(A)}{B - A} \cdot (B - A) = f(B) - (f(B) - f(A)) = f(A)$$

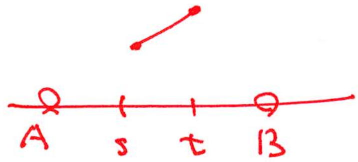
が成立しますから Rolle の定理を φ に適用できて，

$$\varphi'(c) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f'(c) - \frac{f(B) - f(A)}{B - A} \cdot 1 = 0$$

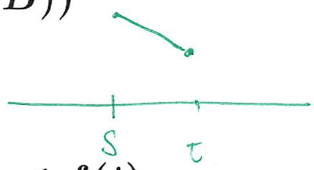
を満たす $c \in (A, B)$ が存在することが分かります．

定理

微分可能な関数 $f:\ (A,B) \to \mathbf{R}$ が



$$f'(t) > 0 \quad (t \in (A,B))$$



を満たすとします．このとき

$$A < s < t < B \Rightarrow f(s) < f(t)$$

fは狭義の単調増加.

が成立します．他方，f が

$$f'(t) < 0 \quad (t \in (A,B))$$

を満たすならば，

$$A < s < t < B \Rightarrow f(s) > f(t)$$

が成立します．

$[s,t]$ で平均値の定理から $\exists c$

$s < c < t$

$$\underset{0}{\overset{\vee}{f'(c)}} = \frac{f(t)-f(s)}{\underset{0}{\overset{\vee}{t-s}}} \rightsquigarrow f(t)-f(s) > 0$$

$f(t) > f(s)$

定理

$f : (A, B) \longrightarrow \mathbb{R}$　2階微分可能

$f''(t) > 0$　　$t \in (A, B)$

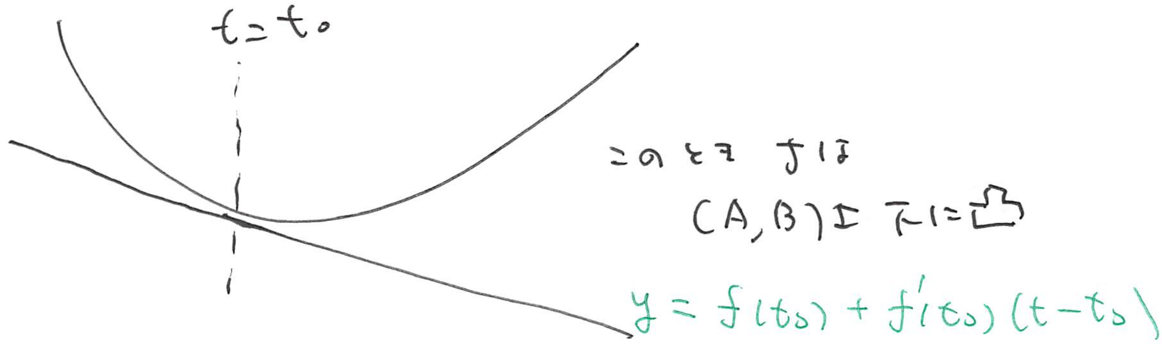
$<$

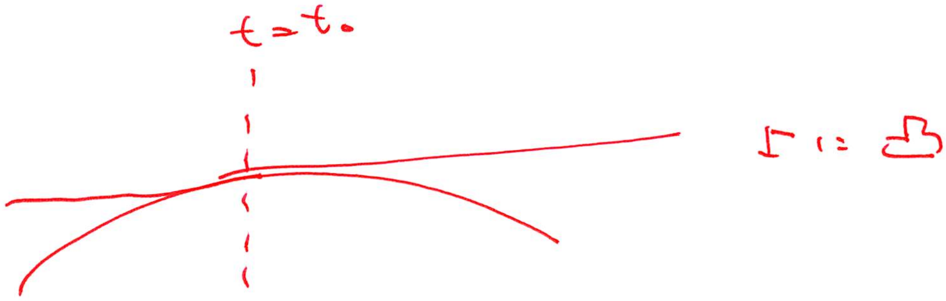
$t_0 \in (A, B)$ 任意とする.

$$f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

$<$　　$(t \neq t_0,\ t \in (A, B))$

CT 120p.





$$F(t) = f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)$$

$$F'(t) = f'(t) - f'(t_0) \cdot 1$$

$$F''(t) = f''(t) > 0 \quad \to \quad F'(t) \text{ は}$$

狭義の単調増加.

$A < s < t_0 < t < B$.

$$\rightsquigarrow \quad F'(s) < \underset{= 0}{F'(t_0)} < F'(t)$$

t		t_0	
F'	$-$	0	$+$
F	↘	0	↗

t_0

$t \neq t_0$ で $\quad F(t) > 0$

$$f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

Taylor の定理

Nobuyuki TOSE

June 27, 2017

Cauchy の平均値の定理

A　B

Theorem

関数 $f:\ [A,B]\to\mathbf{R}$, $g:\ [A,B]\to\mathbf{R}$ に対して

$$f \text{ と } g \text{は}[A,B] \text{ 上で連続で，} (A,B) \text{ で微分可能とする．}$$

さらに

$$f'(x)\text{と}g'(x)\text{は同時にゼロにならないとする．} \qquad (*)$$

そして

$$g(B)-g(A)\neq 0$$

$g(B)\neq g(A)$

とする．このとき

$$\frac{f(B)-f(A)}{g(B)-g(A)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$g(t)=t$
↓
平均値.

がある $\xi\in(A,B)$ に対して成立する．

Proof

Proof $\alpha = f(B) - f(A)$, $\beta = g(B) - g(A)$ と定義する．

$$\varphi(x) = \beta(f(x) - f(A)) - \alpha(g(x) - g(A))$$

に対して Rolle の定理が適用できるか確認しよう．

$$\varphi(A) = \beta \cdot 0 - \alpha \cdot 0 = 0$$

は明らかで，さらに

$$\varphi(B) = \beta \cdot \overbrace{(f(B) - f(A))}^{\alpha\ =} - \alpha \cdot \overbrace{(g(B) - g(A))}^{\beta\ =} = \alpha\beta - \alpha\beta = 0$$

から $\varphi(A) = \varphi(B)$ が従う．

$$\varphi'(x) = \beta f'(x) - \alpha g'(x)$$

と計算して，Rolle の定理を適用するとある $\xi \in (A, B)$ に対して

$$0 = \varphi'(\xi) = \beta f'(\xi) - \alpha g'(\xi)$$

が成立することが分かる．

Proof(2)

従って

$$\overbrace{(g(B) - g(A))}^{\neq 0} f'(\xi) = (f(B) - f(A))g'(\xi)$$

となる．ここで $g'(\xi) = 0$ とはならないことに注意しよう．もし $g'(\xi) = 0$ ならば

$$(g(B) - g(A))f'(\xi) = 0$$

となるが，さらに仮定 $g(B) - g(A) \neq 0$ を用いると $f'(\xi) = 0$ となる．
ところがこれは $(*)$ に反する． $\to$ $g'(\xi) \neq 0$
ようやく

$$\frac{f(B) - f(A)}{g(B) - g(A)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

が導ける．実際，$g(B) - g(A) \neq 0$ と $g'(\xi) \neq 0$ が成立するからである．